확장유한요소법을 이용한 강재의 균열진전해석

연세대학교 대학원

토목공학과

송 정 훈

확장유한요소법을 이용한 강재의 균열진전해석

지도 이 상 호 교수

이 논문을 석사 학위논문으로 제출함

2002년 12월 일

연세대학교 대학원

토목공학과

송 정 훈

송정훈의 석사 학위논문을 인준함

심사위원_____

심사위원_____

심사위원_____

연세대학교 대학원

2002년 12월 일

감사의 글

본 논문은 연세대학교 토목공학과 구조 및 교량공학 연구실에서 이루어진 것으로서 논제의 선정으로부터 논문의 완성에 이르기까지 세심한 지도와 끊임없는 격려로 애정을 가지고 이끌어 주신 지도교수 이상호 교수님께 깊은 감사를 드리며 지난 2년간 관심과 애정을 가지고 논문의 완성에 도움을 주신 김상효 교수님과 본 논문의 심사를 맡아주신 송하원 교수님께도 감사의 마음을 전합니다. 4년간의 학부재학 기간을 거쳐 대학원 생활을 하는 동안 많은 지도와 격려를 해주신 변근주 교수님, 김수일 교수님, 정연규 교수님, 조원철 교수님, 김문겸 교수님, 고광백 교수님, 허준행 교수님, 정상섬 교수님, 손홍규 교수님, 최성욱 교수님, 임윤묵 교수님, 한승헌 교수님, 이준환 교수님께도 진심으로 감사의 말씀을 드립니다.

이제는 어느덧 지난 시간이 되어버린 대학원 시절을 같이 보내며 학문적 분야뿐만 아니라 삶에 있어서도 좋은 본보기를 보이며 많은 격려와 조언을 아끼지 않았던 연구실의 맏형인 효진형, 본 논문을 완성하기까지 끊임없는 아이디어와 조언을 제공해준 영철형께 감사를 드립니다. 또한 수치해석에 대한 새로운 생각과 개념들을 조언해 준 수학과 박사과정 명원형께도 아울러 깊은 감사를 전합니다. 가끔 차를 같이 타고 가며 끊임없는 이야기로 저에게 삶에 대한 많은 이야기를 해준 연석형, 힘들어하는 저에게 묵묵히 살아가는 모습을 보여준 봉근형, 십년이라는 차이에도 불구하고 저와 같이 대학원에 입학하여 생활을 하고 이제 다시 군대로 돌아가야 하는 대학원 동기 김택선 소령님과 언제나 저의 이야기를 들어주며 인생의 선배로서 좋은 조언을 아끼지 않았던 용환형께 진심으로 감사의 마음을 전합니다. 그리고 같이 연구실 생활을 했던 민우형, 기훈형 그리고 주영이 모두에게 감사합니다. 또한 자주 뵙지는 못했지만 만나면 항상 반갑게 맞아주셨던 이상우 선배님, 이용선 선배님, 그리고 준환형께 고마움을 표합니다.

이제는 가끔씩 밖에 보지 못하지만 학부 때부터 저와 같이 지내다 이제는 어

엿한 직장인이자 한 가정의 남편이 된 장환형, 조금 있으면 이렇게 될 대학원생 명휘형, 재명형 군대 제대 후 사람이 되어 온 학부 동기 태성이, 재형이, 넉넉한 웃음으로 따뜻함을 전해주었던 중은형 그리고 지금의 제가 있기까지 저의 벗이 되어준 다른 많은 분들께도 고마움을 표합니다.

마지막으로 학부 때부터 지금까지 저의 옆에서 부족한 저를 따뜻한 눈으로 바라보며 힘들 때도 모든 것을 같이 공유하고자 노력해온 나의 사랑하는 미래의 신부 五貞에게 각별한 애정과 고마움을 표하며, 저를 키워준 가족들에게도 마음으로부터의 감사를 전해드립니다.

2002년 12월 구조 및 교량공학 연구실에서

차 례

차례 ····· i
그림차례 ····· iii
표차례 ····· v
사용기호표 ····· vi
국문요약 ····· ix

제1장 서론 ····· 1
1.1 연구목적 ····· 2
1.2 연구동향 ····· 3
1.3 연구방법 ····· 5
1.4 연구범위 및 제한사항 ····· 6

제2장 유한요소법의 정식화 ····· 7
2.1 불연속경계가 있는 해석대상체의 약형식 ····· 7
2.2 유한요소법 적용을 위한 이산화 ····· 10

제3장 내적불연속문제를 위한 기저함수 확장 ····· 12
3.1 균열의 모형화 ····· 12
3.1.1 프로그램상의 균열인식 ····· 12
3.1.2 꺾어진 균열에 대한 mapping ····· 17
3.1.3 균열면의 불연속성 모형화 ····· 20
3.1.4 균열선단의 응력특이성 모형화 ····· 23
3.2 원홀의 모형화 ····· 27
3.3 확장유한요소법의 정식화 ····· 29

제4장 균열진전해석을 위한 알고리즘 ····· 33
4.1 파괴역학의 계수결정 ····· 33
4.1.1 영역적분형태의 교차적분 정식화 ····· 33
4.1.2 교차적분의 수치적 수행 ····· 37
4.2 균열진전의 수치적 계산 ····· 40
4.2.1 균열의 성장방향 결정 ····· 40
4.2.2 파괴역학이론에 근거한 균열진전해석 알고리즘 ····· 43

제5장 확장유한요소법을 이용한 균열진전해석 ····· 44
5.1 내적 불연속면이 분포하는 부재의 patch 시험 ····· 44
5.1.1 균열선단의 응력특이성 검토 ····· 44
5.1.2 균열회전각에 따른 응력확대계수 검토 ····· 46
5.1.3 원홀 주변의 응력특이성 검토 ····· 48
5.2 기본적 파괴역학 문제의 균열진전해석 ····· 50
5.2.1 인장하중을 받는 편측균열 ····· 50
5.2.2 전단하중을 받는 편측균열 ····· 52
5.2.3 인장하중을 받는 중앙균열 ····· 54
5.3 홀이 있는 접합부의 균열진전해석 ····· 56
5.3.1 원홀 주변에서 발생한 두개의 균열 ····· 56
5.3.2 두개의 원홀 사이에 발생한 중앙균열 ····· 58
5.4 원홀이 있는 3-point bending 부재의 균열진전해석 ····· 60

제6장 결론 ····· 66

참고문헌 ····· 67

영문요약 ····· 72

그림차례

그림 2.1 A body with internal boundary subjected to loads ····· 7
그림 3.1 (a) Schematic of element need to enrich discontinuous function
(b) Schematic of element need to enrich singular function ····· 13
그림 3.2 Schematics of four basic cases to check when determining line
intersections ····· 14
그림 3.3 Schematic for determining if two line segments intersect ····· 15
그림 3.4 Two cases of one more node is coincided with crack line ····· 16
그림 3.5 Schematic of unmapped kinked crack ····· 17
그림 3.6 Coordinate mapping used for kinked crack ····· 18
그림 3.7 (a) Schematic of discontinuous function for representing discontinuity
of crack (b) Local coordinate to define discontinuous function ····· 20
그림 3.8 Compact support of a node ····· 21
그림 3.9 The squared nodes are enriched by a discontinuous function ····· 22
그림 3.10 Local axes for the polar coordinate at the crack tips ····· 24
그림 3.11 The shapes of four singular basis functions used for crack tip
element ····· 25
그림 3.12 The circled nodes are enriched by singular functions ····· 26
그림 3.13 (a) The enrichment technique for hole (b) The diamonded nodes
are enriched by the unit/zero value step function ····· 28
그림 3.14 The enrichment strategy to represent local characteristic behavior ···· 29
그림 4.1 Schematic of conventions at crack tip ····· 36
그림 4.2 The selected nodes about crack tip for constricting weighting
function ····· 38
그림 4.3 Schematic of discrete crack segments ····· 40
그림 4.4 An analysis algorithm used for growing cracks ····· 43
그림 5.1 (a) Patch test model (b) Crack tip stress (σ_{yy}) profile($\theta = 0$, $r > 0$) ···· 45
그림 5.2 Plate with a center crack at angle β ····· 46
그림 5.3 (a) K_{I} vs. β for a plate with an angled center crack (b) K_{II} vs. β
for a plate with an angled center crack(unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 47
그림 5.4 Plate with a center hole ····· 48

그림 5.5 Stress profile around hole ····· 49
그림 5.6 Edge crack in tension problem ····· 50
그림 5.7 Stress intensity factor(K_I) as crack growth(unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 51
그림 5.8 Stress (σ_{yy}) distribution with growing crack(unit: psi) ····· 52
그림 5.9 (a) Edge crack in shear problem (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi) ····· 53
그림 5.10 Edge crack growth in shear problem and schematic of enriched nodes with growing crack ····· 54
그림 5.11 (a) Central crack in tension problem (b) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step(unit: psi) ····· 55
그림 5.12 Stress intensity factor(K_I) for plate with central crack (unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 55
그림 5.13 One hole and two cracks in tension problem ····· 56
그림 5.14 Stress intensity factor(K_I) for plate with one hole and two cracks (unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 57
그림 5.15 (a) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi)(unit: psi) ····· 58
그림 5.16 (a) two holes and center crack in tension problem (b) Stress intensity factor(K_I) for plate with two holes and center crack(unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 59
그림 5.17 (a) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi) ····· 59
그림 5.18 3 point bending beam with three holes and edge crack ····· 60
그림 5.19 Digitized photographs of observed crack trajectories ····· 61
그림 5.20 Stress(σ_{yy}) distribution at initial step(unit: psi) ····· 62
그림 5.21 Crack growing paths of 3 point bending beam with three holes and edge crack(case 1) ····· 63
그림 5.22 Crack growing paths of 3 point bending beam with three holes and edge crack(case 2) ····· 65
그림 5.23 The enrichment strategy to represent local characteristic behavior ···· 65

표차례

표 5.1 Error of stress intensity factor for mixed mode(unit: $psi\sqrt{in}$) ····· 53
표 5.2 Initial geometry of two crack cases ····· 61

사용기호표

$a(\boldsymbol{x})$: 추가적인 형상함수의 미지계수(균열면)

Δa : 허용균열진전량

$\boldsymbol{b}$: 체적력

$b(\boldsymbol{x})$: 추가적인 형상함수의 미지계수(균열선단)

$\boldsymbol{C}$: 변형률 변위함수

$c(\boldsymbol{x})$: 추가적인 형상함수의 미지계수(원홀)

$d(\boldsymbol{x})$: 형상함수의 미지계수

$\boldsymbol{E}$: 탄성계수

$g(\boldsymbol{x})$: 균열선단 응력특이성 표현을 위한 특이함수

$H(\boldsymbol{x})$: 균열면 불연속성 표현을 위한 불연속함수

i : 전체절점

$I^{(1+2)}$: 가상상태 1, 2에 대한 교차적분값

j : 균열면을 포함한 요소의 절점

J : J적분값

$J^{(1+2)}$: 가상상태 1, 2에 대한 J적분값

k : 균열선단을 포함한 요소의 절점

K : 응력확대계수

K_I : 모드Ⅰ 응력확대계수

K_{Ieq} : 등가 모드Ⅰ 응력확대계수

K_{II} : 모드Ⅱ 응력확대계수

$K_I^{(1)}$: 가상상태 1에 대한 모드Ⅰ 응력확대계수

$K_{II}^{(1)}$: 가상상태 1에 대한 모드Ⅱ 응력확대계수

l : 원홀을 포함한 절점

$N(\boldsymbol{x})$: 유한요소법의 기저함수

$q(\boldsymbol{x})$: 교차적분을 위한 가중함수

r : 균열선단부터의 거리

r_d : 교차적분반경

$\bar{\boldsymbol{t}}$: 규정된 표면력

u_i : i방향 변위

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$: 변위함수

$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$: 근사변위함수

$\bar{\boldsymbol{u}}$: 규정된 변위

$\boldsymbol{U}$: trial 함수의 공간

$\boldsymbol{U}^h$: $\boldsymbol{U}$의 유한차원 부분공간

$\boldsymbol{U}_0$: test 함수의 공간

w : 절점의 최소정의 구역

W : 탄성변형에너지

$W^{(1+2)}$: 가상상태 1, 2에 대한 교차상태의 변형에너지

Γ : 해석경계영역

Γ_c : 내부불연속경계영역(원홀)

Γ_d : 내부불연속경계영역(균열)

Γ_t : 자연경계영역

Γ_u : 필수경계영역

$\boldsymbol{\varepsilon}$: 변형률텐서

θ_c : 균열성장각

χ : Kolosov 상수

μ : 전단탄성계수

ν : 포아송비

$\boldsymbol{\sigma}$: 코시응력텐서

σ_{ij} : ij방향 응력

$\Psi(\boldsymbol{x})$: 원홀의 불연속성 표현을 위한 불연속함수

Ω : 해석내부영역

∇ : 그레디언트 연산자

∇_s : 그레디언트 연산자의 대칭부분

국문요약

확장유한요소법을 이용한 강재의 균열진전해석

강재에 분포하는 균열의 성장으로 인하여 부재가 파단에 이르는 과정은 공학 분야의 주된 관심사중 하나이다. 이를 위하여 본 논문에서는 확장유한요소법 (extended finite element method)에 균열성장법칙이 반영된 수치해석 알고리즘을 접목하여 강재에 분포하는 균열들이 점차 성장해감에 따라 결국 부재가 파단에 이르게 되는 과정을 해석적 방법을 바탕으로 연구하였다.

본 연구에서는 부재내에 존재하는 원홀 및 균열면의 응력과 변위에서 보이는 불연속성과 균열선단의 응력특이성을 반영할 수 있는 특이기저함수들을 추가적으로 이용하여 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수를 개선함으로서 균열로 인한 내부불연속경계에서 발생하는 요소망 제약조건을 극복하였다. 또한 일정한 하중에 의하여 초기균열이 점차 성장함에 따라 부재가 파괴에 이르는 과정을 규명하기 위한 균열진전해석 알고리즘을 제안하고 이를 적용하였다.

이를 통하여 요소망 구성상의 제약조건 없이 일정한 형태로 구성된 요소망을 사용하여 강재 내부에 존재하는 다양한 형태의 균열들이 주어진 경계조건과 하중조건에 따라 성장하는 과정을 정확히 예측할 수 있었으며 해석을 통하여 얻어진 균열성장 경로와 파괴역학의 계수들을 기존의 이론해와 비교 검증함으로써 본 연구를 통하여 제시된 균열진전해석기법의 정확성과 효율성을 검증하였다.

핵심되는 말 : 확장유한요소법, 요소망 제약조건, 균열성장, 균열성장경로

제1장 서론

강재는 시공과정의 편리함으로 인하여 교량과 같은 토목구조물의 재료로 널리 사용되고 있지만 제작 초기과정부터 여러 가지 형태의 미세균열을 함유하고 있을 뿐만 아니라 시공을 위한 부재간의 접합부위 등에서도 다양한 형태의 추가적인 균열이 발생하게 된다. 이와 같은 균열은 공용기간 중에 작용하는 다양한 형태의 하중으로 인하여 점차 성장하여 구조물의 안정성과 사용수명을 감소시키는 중요 인자로 작용함으로서 구조물의 안전에 심각한 위협을 주게 된다.

따라서, 강재에 발생하는 균열과 이로 인하여 부재가 파단에 이르게 되는 과정을 예측하는 것은 토목공학분야에서 중요한 공학적 관심사로 대두되고 있으며 이에 대한 정확한 해석을 위한 다양한 수치해석기법들이 제안되었다. 이중 기존의 유한요소법을 사용하여 해석을 수행할 경우에는 균열이 진전함에 따라 요소망을 재구성(re-meshing)하여 균열진전에 따른 새로운 기하학적 형상을 묘사해야 하는 비효율성이 존재한 반면, 무요소법을 사용할 경우에는 유한요소법과 같은 요소망 구성상의 제약조건은 없지만 최근까지 학술적 연구를 목적으로 하여 연구가 진행되어 왔기 때문에 실제적인 공학문제 적용에는 미흡함이 있다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 본 연구에서는 이미 실제적 공학문제에 뛰어난 적용성을 인정받은 기존의 유한요소법을 바탕으로 이를 개선하여 요소망 제약조건 없이 기하학적 형상이 변화되는 균열진전문제를 해석할 수 있는 수치알고리즘을 개발하고 이를 이용하여 수치해석프로그램을 개발함으로서 토목분야의 관심으로 대두되고 있는 균열진전문제를 효율적으로 해석할 수 있는 균열진전해석기법을 제안하고자 한다.

1.1 연구목적

과거에 주로 실험에 의존했던 구조체에 발생한 균열에 의한 영향을 보다 정확히 규명하기 위해 최근에는 파괴역학 분야에 응용 가능한 수치해석기법 개발을 위한 많은 연구가 수행되고 있다. 특히, 이 분야에 종사하는 전문가들은 1990년대 후반에 개발된 요소의존성(mesh dependency)을 탈피한 새로운 해석기법인 무요소법(Meshfree Method)을 사용하여 과거에는 활발히 다루지 못하였던 구조체의 파괴진행현상들을 규명하고 있다. 이는 무요소법이 절점만을 이용하여 해석을 수행하기 때문에 균열의 기하학적 형상이 변화하는 문제에 대해서도 유한요소법과 같은 요소망 구성상의 제약조건이 없기 때문이다.

그러나 무요소법은 실제 공학문제를 해석하는데 있어서 유한요소법과 같은 해석강건성(robustness)의 확보가 아직까지는 미흡하고 그 개념상의 확연한 차이로 인하여 기존의 유한요소법을 기반으로 개발된 상용 S/W에 직접적으로 접목하여 사용할 수 없으며 프로그램 구현이 복잡하고 계산에 소요되는 비용이 높은 단점을 지니고 있어 학문적 연구분야에서는 활발한 연구가 진행되는 반면 빠르고도 정확한 해석을 요구하는 실제적인 공학분야의 문제해결에서는 아직까지 폭넓게 사용되지 못하는 실정이다. 또한 유한요소법은 폭넓은 범용성을 바탕으로 실제적인 공학문제 해석에 많이 적용되고 있으며 계산효율성이나 해석강건성의 측면에서는 무요소법보다 우월함이 입증되었지만 아직까지는 균열진전해석과 같이 기하학적 형상이 변화하는 문제에 대한 적용에 있어서는 요소망 제약조건으로 인한 문제점들을 근본적으로 극복하지 못하고 있다.

따라서 현재 공학분야에서는 기하학적 형상이 변화하는 균열문제에 뛰어난 적용성을 확보하면서도 효율적으로 강건하게 해석할 수 있는 새로운 해석기법 개발과 그 적용이 요구되고 있다. 이에 본 연구에서는 실제적인 공학문제의 적용성을 극대화시킬 수 있도록 확장유한요소법을 이용하여 토목분야의 주된 공학적 관심사중의 하나인 균열전파 문제에 적용하여 그 효율성 및 적용성을 검토함과 동시에 부재가 균열로 인하여 파단에 이르게 되는 과정을 연구하고자 한다.

1.2 연구동향

구조물에 분포하는 기하학적 형상이 변화하는 균열로 인한 영향을 해석하기 위한 수치해석기법의 개발은 유한요소법과 무요소법을 큰 축으로하여 진행되어 왔다. 따라서, 선행연구에 대한 동향파악을 위해서는 이 두가지 해석기법 모두에 대한 고찰이 필요하다. 유한요소법은 일반적인 형태의 공학문제를 해석하는데 있어서 해석강건성을 지닌 동시에 과정상의 간편함으로 인하여 적용성이 뛰어나다는 장점을 보이지만, 갤러킨법(Galerkin method)에 의하여 편미분 방정식을 선형 시스템 방정식으로 정식화함에 있어서 요소(element)를 사용하여 해석공간(approximating space)을 구성하므로 균열문제해석을 위해서는 요소망 구성상의 제약조건이 발생하는 단점이 있다. 물론 기존의 연구를 통하여 이동유한요소법(Koh 등, 1995)을 이용하여 균열이 성장함에 따라 요소망을 자동적으로 재구성하는 해석기법이나 경계요소를 추가함으로써 균열의 성장을 모형화할 수 있는 방법(Saleh와 Aliabadi, 1998) 등이 제안되기도 하였지만, 근본적으로 요소망 제약조건을 완전히 탈피하지 못하고 있어 기하학적 형상이 변화하는 균열해석문제에 있어서는 추가의 노력이 소요되었다.

이와 같은 요소망 제약조건을 극복하기 위하여 개발된 수치해석 기법이 절점의 정보만을 사용하여 수치해석을 수행하는 무요소법이다. 이는 1960년대 또는 1970년대에 도입된 입자해석방법(Particle Method)인 Particle in Cell Method(PIC) (Harlow, 1964)와 Smoothed Particle Method(SPH) (Lucy, 1977)를 기반으로 하여 초기에는 유체문제와 천체문제 등을 위주로 적용되었으나, 이후 Diffuse-Element Method(DEM) (Nayroles 등, 1992), Element Free Galerkin Method(EFG) (Belytschko 등, 1994), Reproducing Kernel Particle Method(RKPM) (Liu 등, 1995) 등이 개발되어 고체역학분야를 대상으로 하여 기존의 유한요소법이 갖는 요소의존성으로 인하여 적용에 어려움을 나타내었던 수치해석문제 등을 다루는 데 있어서 많은 학술적 연구성과를 나타내었다. 그러나 무요소법은 유한요소법에 비하여 높은 계산비용 및 자원을 요구하며 필수경계조건(essential boundary condition)을

만족시키기 위하여 추가의 노력이 필요한 동시에 해석강건성이 유한요소법 보다는 부족하기 때문에 실제공학문제의 적용에는 다소의 어려움을 보이고 있다.

이와 같은 이유로 인하여 최근 다시 대두되고 있는 새로운 연구방향이 유한요소법을 기반으로 국부적 특이성을 요소내적으로 표현할 수 있도록 기저함수를 확장함으로서 요소망 제약조건을 극복하는 방법이며 이는 단위분할법(Melenk와 Babuška, 1996) 개념에 입각한 국부적 기저함수의 확장이라는 형식으로 연구(Dolbow 등, 2000)가 진행되어 왔다. 이를 통하여 단위분할법 개념에 입각한 기저함수의 부분적 조작을 이용하여 국부적 특이성 문제를 최소의 요소망 재구성만을 이용하여 해석할 수 있는 기법(Belytschko와 Black, 1999)이나 요소망 재구성 없이 다룰 수 있는 연구(Moës 등, 1999)와 같이 유한요소법의 요소망 의존성(mesh-dependency)을 극복하여 불연속면을 요소망에 상관없이 자유로이 다루기 위한 연구가 진행되고 있다. 이를 이용하여 현재에는 임의의 형상으로 교차하는 균열까지도 요소망 제약조건 없이 해석할 수 있는 기법(Daux 등, 2000)과 임의의 다수의 공극(void)이 분포하는 해석대상체의 자유로운 해석이 가능한 기법(Sukumar 등, 2000a), 이를 3차원 문제에 적용하고자 한 연구(Sukumar 등, 2000b) 등이 진행되고 있다.

1.3 연구방법

본 연구는 확장유한요소법을 이용하여 다양한 형태의 균열을 갖고 있는 강재가 균열이 성장함에 따라 파괴에 이르게 되는 과정을 효율적으로 정확하게 해석할 수 있는 알고리즘 개발을 목적으로 한다. 개발된 알고리즘은 강재에 발생할 수 있는 균열모형을 선정한 후 균열들의 형상에 따라 균열이 진전하고 부재가 파단에 이르는 과정을 일반적인 균열성장법칙을 적용하여 다음과 같은 방법으로 규명한다.

(1) 요소망 제약조건 없이 요소내(inter-element)에서도 균열로 인한 국부적 특성을 반영할 수 있는 특이기저함수를 단위분할법의 개념을 근간으로 기존의 유한요소법에 적용한다.

(2) 해석대상체의 내부에 분포하는 원홀에 대해서도 요소망을 불연속적으로 구성하는 기존의 방법에 의존하지 않고 해석과정에 반영할 수 있도록 추가의 기저함수를 단위분할법의 개념에 따라 도입한다.

(3) 확장유한요소법을 사용한 해석기법에 일반적인 균열성장법칙을 적용함으로서 균열들의 성장과정을 해석적 방법을 통하여 수치적으로 모형화 한다.

(4) 균열성장량은 초기균열들이 성장하여 강재가 파단되는 과정을 모형화하기 위하여 일정한 크기로 가정한 후 해석 단계에 따라 균열을 조금씩 진전시키면서 균열들의 성장경로를 추정한다.

(5) 응력확대계수의 산정은 영역적분 형태의 교차적분법을 이용하며 균열성장방향은 최대주응력한계이론을 이용하여 결정한다.

1.4 연구범위 및 제한사항

확장유한요소법을 사용하여 강재에 분포하는 균열의 전파해석을 수행하기 위한 연구범위와 제한사항은 다음과 같다.

(1) 본 연구는 기존의 유한요소법을 개선하여 요소망 제약조건 없이 균열 및 원홀로 인한 불연속과 균열선단의 응력특이성을 반영할 수 있는 새로운 해석기법인 확장유한요소법에 토목분야에서 주된 공학적 관심사중의 하나로 대두되는 강재의 균열전파 해석을 위한 수치해석알고리즘을 적용한다.

(2) 강부재를 대상으로 한 균열진전해석을 수행함에 있어 해석대상 재료가 균열선단에서 매우 작은 소성역(small scale yielding)이 존재하여 2차원 선형탄성 파괴역학이론에 따른 해석이 가능하다고 가정한다.

(3) 해석대상이 되는 균열의 파괴모드는 2차원 평면문제로 해석 가능한 모드Ⅰ, 모드Ⅱ 및 혼합모드 파괴만을 대상으로 한다.

(4) 균열진전해석시 균열성장방향을 산정하기 위한 이론으로는 최대주응력한계이론을 사용한다.

제2장 유한요소법의 정식화

2.1 불연속경계가 있는 해석대상체의 약형식

본 절에서는 내부에 불연속경계를 갖는 2차원 선형탄성 해석대상체를 대상으로 유한요소법의 적용을 위한 정식화 및 이를 바탕으로한 이산화 과정에 대한 설명을 제시한다. 이를 위하여 그림 2.1과 같이 영역 Ω에 대하여 경계 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_d$를 갖는 해석대상체를 가정한다. 이때 Γ_u는 변위 $\bar{\boldsymbol{u}}$가 선행 재하된 경계변위이며, Γ_t에는 표면력 $\bar{\boldsymbol{t}}$가 작용하는 경계이고, Γ_d는 경계면에서 표면력이 없는 조건(traction-free condition)을 만족하는 불연속경계이다.

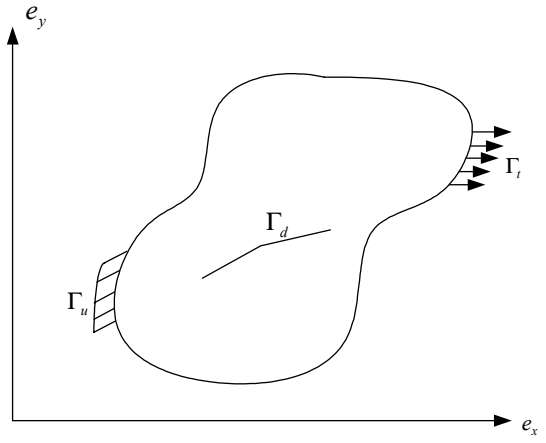


그림 2.1 A body with internal boundary subjected to loads

특히 이와 같은 내부 불연속면을 포함한 해석대상체는 식 (2.1a)와 같은 지배방정식과 식 (2.1b) 및 식 (2.1c)와 같은 경계조건을 갖는다. 이중 식 (2.1c)는 불연속경계에서의 표면력이 없다는 경계조건을 나타낸 것이다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 \quad in\ \Omega \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}}\ on\ \Gamma_t \tag{2.1b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = 0\ on\ \Gamma_d \tag{2.1c}$$

여기서, $\boldsymbol{n}$은 단위수직벡터(unit normal vector)이며, $\boldsymbol{\sigma}$는 코시응력텐서(cauchy stress tensor), $\boldsymbol{b}$는 체적력이다.

또한 미소변위 가정 하에서 2차원 선형탄성 해석대상체에 대해서 식 (2.2)와 같은 변형률-변위의 관계가 성립한다

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \nabla_s \boldsymbol{u} \tag{2.2}$$

이때 ∇_s는 그레디언트 연산자(gradient operator)의 대칭부분이며 경계조건은 다음의 식과 같다.

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}\ on\ \Gamma_u \tag{2.3}$$

또한 Hook 텐서 $\boldsymbol{C}$에 대하여 Hook's law에 따른 구성방정식(constitutive equation)은 식 (2.4)와 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.4}$$

변분법을 적용하여 약형식(weak form)을 얻기 위해 허용가능한 변위장의 공간(admissible displacement field space)을 식 (2.5)와 같이 정의하며, 정의된 $\boldsymbol{U}$의 공간은 변분법 적용시 trial 함수의 공간으로도 사용된다.

$$U=\{\, v\in V : v=\ \bar{u}\ on \quad \Gamma_u\} \tag{2.5}$$

여기서, V는 Babuška와 Rosenzweig(1972) 및 Grisvard(1985)에 의해서 제시된 내적불연속경계가 있는 해석대상체에 적용가능한 해의 공간을 의미한다. 이때의 test 함수는 V공간을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$U_0=\{\, v\in V : v=0\ \ on \quad \Gamma_u\} \tag{2.6}$$

식 (2.5)와 식(2.6)을 통하여 정의된 공간에서 식 (2.1)에 대한 약형식은 다음과 같다. 이는 내부 불연속 경계를 고려한 약형식의 형태이다.

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(v)\ d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{b}\cdot v\ d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}}\cdot v\ d\Gamma \tag{2.7}$$

이와 같은 약형식에 대하여 Belytschko와 Black(1999)은 내부불연속에 대해서는 변위의 불연속성을 표현할 수 있는 함수(jump discontinuity function)를 사용하면 균열면의 경계에서 표면력이 0이 되므로 식 (2.8)이 만족됨을 증명하였다.

$$\int_{\Gamma_c^+} \boldsymbol{\sigma n}\cdot v\ d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} \boldsymbol{\sigma n}\cdot v\ d\Gamma = 0 \tag{2.8}$$

본 연구에서 적용하게 될 확장유한요소법 또한 요소망 제약조건의 극복을 위하여 불연속경계에 대해서는 불연속 변위함수를 사용하게 되므로 결국 식 (2.9)과 같은 형태의 약형식을 이용하게 된다.

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(v)\ d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{b}\cdot v\ d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}}\cdot v\ d\Gamma \tag{2.9}$$

이 식에 앞에서 제시한 구성방정식 식 (2.4)를 적용하고 trial 함수와 test 함수가 정의된 공간에 따라 각각의 경계조건을 고려하면 최종적으로 식 (2.10)과 같은 무한공간(infinite space)에 대한 약형식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\ d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\ d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{v}\ d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U_0} \tag{2.10}$$

2.2 유한요소법 적용을 위한 이산화

무한공간에서 정의된 약형식은 실제적인 유한요소법의 이산화를 위하여 유한공간(finite space)에서 정의된 약형식으로 변형하여야 하며 이는 다음과 같은 정의를 통하여 변형할 수 있다. $\boldsymbol{V^h}$는 $\boldsymbol{V}$의 유한차원의 부분공간(finite dimensional subspace)으로서 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{V^h} \equiv span\{\phi_i\}_{i=1}^{n} \tag{2.11}$$

여기서, $\{\phi\}$는 기저함수의 집합이고 유한부분공간 $\boldsymbol{u^h}$는 식 (2.12)과 같은 형태로서 $\boldsymbol{u^h} \subset \boldsymbol{u}$인 공간이다.

$$\boldsymbol{U^h} = \left\{ \boldsymbol{v^h} \in \boldsymbol{V^h} : \boldsymbol{v^h} = \bar{\boldsymbol{u}}\ on \quad \Gamma_u \right\} \tag{2.12}$$

또한, $\boldsymbol{U_0^h} \subset \boldsymbol{U_0}$로서 식 (2.13)을 만족한다.

$$\boldsymbol{U_0^h} = \left\{ \boldsymbol{v^h} \in \boldsymbol{V^h} : \boldsymbol{v^h} = 0\ on \quad \Gamma_u \right\} \tag{2.13}$$

이상의 정의로부터 u^h를 위한 이산화된 형태의 약형식은 식 (2.14)과 같다.

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^h) : C : \varepsilon(v^h)\ d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v^h\ d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot v^h\ d\Gamma \quad \forall v^h \in U_0^h \quad (2.14)$$

이때 앞에서 언급했던 것 같이 u^h의 부속공간은 반드시 u^h에 대하여 불연속한 변위장을 Γ_d에서 갖아야 한다. 이와 같은 불연속 변위장은 기존의 유한요소법에서는 요소망을 불연속적으로 구성함을 통하여 얻는 것이었으나 본 연구에서 제안하는 확장유한요소법에서는 추가적인 형상함수확장을 통하여 얻음으로써 요소망에 무관한 불연속변위장의 도입이 가능하여 내부불연속 해석대상체의 자유로운 해석이 가능하다.

제3장 내적불연속문제를 위한 기저함수 확장

3.1 균열의 모형화

확장유한요소법은 균열로 인하여 발생하는 국부적 특이거동(local characteristic behavior)을 반영할 수 있는 추가적인 기저함수를 기존의 유한요소법에서 사용되는 근사변위함수에 단위분할법(partition of unity)의 개념을 근간으로 하여 국부적으로 추가확장함으로써 요소망(mesh) 제약조건 없이 기하학적 형상이 변화하는 균열에 대한 해석을 수행할 수 있는 수치해석기법이다. 따라서, 이를 실제적인 수치해석 프로그램으로 작성하기 위해서는 프로그램상에서 균열을 수치적으로 모형화하고 각각의 국부적 특성에 맞는 특이기저함수를 선택하여 기존의 근사변위함수를 확장하기 위한 방법이 제시되어야 한다. 또한 초기 데이터 입력시 해석공간 구성을 위한 요소망정보와 균열형상(geometry)정보를 분리하여 입력시키므로 프로그램 수행시 자동적으로 균열과 요소(element)사이의 위치관계를 파악하는 기법도 필요하다.

본 절에서는 해석수행시 자동으로 균열에 의해서 영향을 받는 요소를 찾아내고 이를 바탕으로 적절한 형태의 기저함수확장을 수행하기 위한 기법들을 제시하도록 한다.

3.1.1 프로그램상의 균열인식

균열면(crack face)과 균열선단(crack tip)에서 각각 보이는 국부적 특이거동은 상이하므로 실제 프로그램 수행시 단순히 균열을 포함하고 있는 요소만을 찾아내는 것은 무의미하며, 균열을 포함하고 있더라도 균열에 의하여 관통되는 요소인지 아니면 균열선단이 위치한 요소인지를 자동적으로 판별할 수 있는 기법이 필요하

다. 이는 다음과 같은 절차를 거쳐서 판별된다.

1) 입력된 균열의 형상정보로부터 균열과 요소의 위치관계 파악을 위한 검색영역을 설정한다. 이를 통하여 전체 해석영역에 구성된 요소망을 대상으로 위치관계 검색시 발생하는 시간적 비효율성을 배제할 수 있다.
2) 1개의 요소를 구성하는 각각의 요소면(element edge)에 대하여 균열에 의해 관통되는 요소면을 검색한다.
3) 요소당 균열에 의해 관통되는 요소면의 숫자를 산정한다.
4) 하나의 요소에 2개의 요소면이 균열에 관통되었을 경우에는 그림 3.1(a)와 같은 경우이므로 이는 균열이 관통하는 요소로 인식한다.
5) 또한, 하나의 요소에 1개의 요소면 만이 균열에 의하여 관통된 경우에는 그림 3.1(b)와 같은 경우이므로 이 요소는 균열선단이 위치한 요소로 판별한다.



(a) (b)

그림 3.1 (a) Schematic of element need to enrich discontinuous function
(b) Schematic of element need to enrich singular function

이상의 절차를 실제적인 수치해석 프로그램에 적용하기 위해서는 균열과 요소면을 구성하는 선분간의 위치관계를 파악할 수 있는 기하학적 위치관계 판별을 위한 알고리즘의 제안이 요구된다. 따라서 본 연구에서는 이 두 선분간의 위치관계를 각 선분을 구성하는 양 끝점들만의 관계를 이용하여 파악할 수 있는 알고리즘을 제시하였다.

임의의 균열에 대하여 요소면을 구성하는 선분의 양 끝점을 x_1과 x_2라 하였을 때, 이 선분과 균열을 나타내는 선분간의 교차 여부를 결정해야 한다. 이런 과

정을 수행하기 위해서는 각각의 선분이 갖는 기울기를 이용하는데 두 선분간의 기울기를 비교하여 절점들의 상대적인 위치를 파악할 수 있으며 더 나아가서는 기울기의 상대적인 차이로 선분들의 교차 및 평행 여부까지 파악할 수 있다. 균열과 요소면의 위치관계에 대해서는 그림 3.2에서 보여주는 네가지 경우를 고려해야 한다. 우선 균열과 요소면이 교차하는 경우는 그림 3.2의 첫 번째와 같이 요소면이 균열에 의하여 완전히 관통되는 경우와 그림 3.2의 두 번째와 같이 요소를 구성하는 절점이 균열면 상에 있어서 특수한 고려가 필요한 경우로 구분된다. 또한 균열이 요소면을 관통하지 않는 경우로 그림 3.2의 세 번째와 같이 균열과 교차 없이 요소면이 균열의 한쪽에 위치하며, 이를 구성하는 선분 $(x_1 - x_2)$이 수직인 경우이다. 선분이 수직인 경우 이 선분의 기울기는 무한대(infinite)이므로 이를 고려하기 위한 특별한 알고리즘이 필요하다. 마지막으로 그림 3.2의 네 번째는 균열과 요소면이 교차하지 않는 경우를 나타낸다.

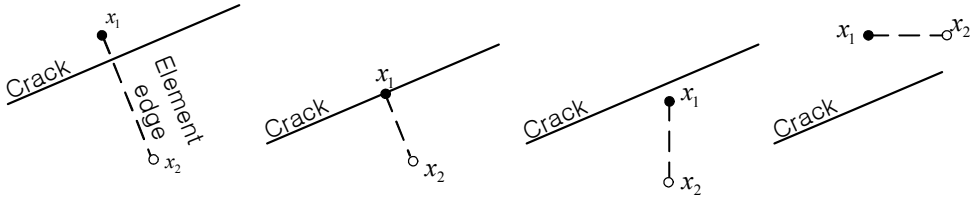


그림 3.2 Schematics of four basic cases to check when determining line intersections

프로그램 상에서 균열을 인식하는 과정은 두 점이 선분의 반대면에 있는지 결정하기 위한 두 가지 기본단계로 이루어져 있다. 첫번째 단계는 요소면을 구성하는 두개의 절점 $((x_1, y_1),(x_2, y_2))$이 균열 $((cx_1, cy_1),(cx_2, cy_2))$을 기준으로 서로 반대쪽 영역에 있는지 결정하는 것이다. 이것은 다음의 식으로 점검된다.

$$\left(\frac{y_1 - cy_1}{x_1 - cx_1} - \frac{cy_2 - cy_1}{cx_2 - cx_1}\right)\left(\frac{y_2 - cy_1}{x_2 - cx_1} - \frac{cy_2 - cy_1}{cx_2 - cx_1}\right) \leq 0 \qquad (3.1)$$

위의 식 (3.1)은 그림 3.3의 첫 번째 경우에 해당하는 식으로써의 식이 성립하면 요소면을 구성하는 절점이 균열을 기준으로 서로 반대영역에 분포하고 있음을 나타낸다. 두번째 단계는 균열선분의 양 끝점이 고려하는 요소면의 반대면에 있는지 결정하는 것이다. 이것은 그림 3.3의 두 번째 경우를 판별하기 위한 식으로서 다음과 같다.

$$(\frac{cy_1-y_1}{cx_1-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})(\frac{cy_2-y_1}{cx_2-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})\leq 0 \tag{3.2}$$

따라서 위에서 제시한 식 (3.1)과 식 (3.2)가 모두 만족된다면 절점 x_1과 x_2는 균열의 반대면에 있는 것이므로 당연히 이 두 절점으로 구성된 요소면 역시 균열에 의해 관통됨을 뜻한다.

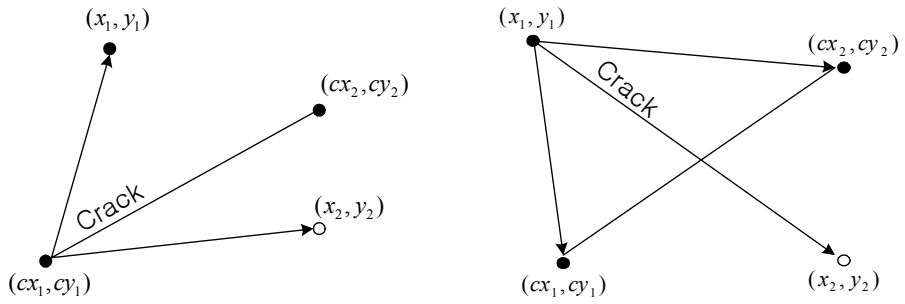


그림 3.3 Schematic for determining if two line segments intersect

그러나 대부분의 기하학적 위치관계 파악을 위한 알고리즘이 그렇듯이 이 경우 역시 몇 가지 특별한 경우들에 대한 별도의 고려가 필요하다. 이 중 한가지는 앞에서도 언급했듯이 그림 3.2의 네 번째 경우처럼 선분중의 하나가 수직이기 때문에 무한경사를 갖는 경우이며, 이와 같은 경우를 판별해 낼 수 있는 부등식은 앞에서 제시한 식의 분모를 없게 함으로서 유도할 수 있다. 즉, 식 (3.1)과 식 (3.2)의 분모를 분자에 곱한 형태로 식을 수정함으로서 무한경사의 경우 분모가 0이

되어 수학적 불능문제(mathematically impossible problem)가 되는 것을 방지할 수 있다.

$$[(y_1 - cy_1)(cx_2 - cx_1) - (cy_2 - cy_1)(x_1 - cx_1)] \times [(y_2 - cy_1)(cx_2 - cx_1) - (cy_2 - cy_1)(x_2 - cx_1)] \leq 0 \quad (3.3)$$

$$[(cy_1 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(cx_1 - x_1)] \times [(cy_2 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(cx_2 - x_1)] \leq 0 \quad (3.4)$$

그러므로 선분중 하나가 수직인 경우에는 식 (3.3)과 식 (3.4)에 대한 검토를 통하여 위치관계의 파악이 가능하다. 고려되어야 할 또 다른 상황은 그림 3.2의 두 번째 경우와 같이 요소면을 구성하는 절점중 하나가 균열선분상에 위치한 경우이다. 이 경우는 그림 3.4와 같이 요소면이 균열과 동일선상에 위치하는 경우들까지 포함하여 세분화할 수 있다.

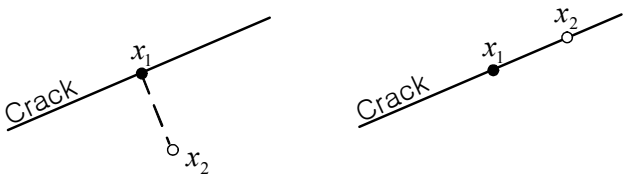


그림 3.4 Two cases of one more node is coincided with crack line

이와 같은 경우는 해당 요소면을 포함한 요소전체에 대하여 기저함수확장기법을 적용해야 하므로 기저함수 확장시 특별한 고려가 필요하다. 또한 진전한 균열과 같이 다수 선분의 연속적인 집합으로 이루어진 균열에 대한 교차여부는 균열을 구성하는 모든 선분에 대하여 위의 사항을 검토 한 후 종합적인 관점에서 균열과 요소의 관계를 파악하게 된다. 이것은 모든 균열선분에 대해 loop를 수행하여 이루어진다.

3.1.2 꺾어진 균열에 대한 mapping

다음절에서 소개될 균열선단의 확장된 영역을 표시하기 위한 식을 살펴보면 $\sin(\theta/2)$항 때문에 $\theta = \pm\pi$를 따라 불연속하게 되는 특성이 있다. 이는 불연속을 표현하는 각도($\theta = \pm\pi$)가 균열선단을 원점으로 하는 새로운 좌표계에 의해서 그림 3.5와 같이 정의되므로 균열선단 이전의 균열면에 대해서는 균열선단의 불연속면과 일치가 필요하다.

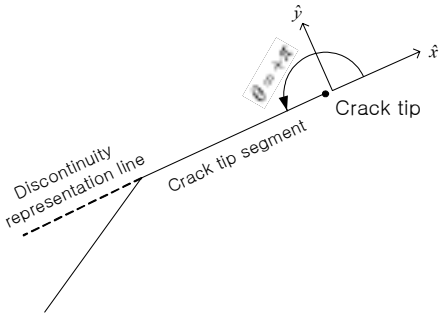


그림 3.5 Schematic of unmapped kinked crack

따라서 꺾여진 균열에 대해 확장된 영역의 불연속성을 모형화한 일련의 선분중 균열선단을 포함한 선분 뒤의 영역에서는 선단을 포함하는 균열을 따라 정렬하는 매핑(mapping) 과정이 필요하다. 매핑과정의 순서는 그림 3.6과 같은 형태로 직선화하여 불연속 영역을 일치시키는 과정으로서 그 순서는 다음과 같다.

1) 균열이 진전하기 이전 단계의 균열선단을 포함하고 있는 선분을 회전 이동하여 균열이 진전하여 새로 생성된 균열선분과 일직선화 한다.
2) 최종단계에서의 균열선단을 포함한 선분과 수직인 선에 상응하는 영역은 회전되지 않는다.
3) 이 둘 사이의 영역은 각 α의 비율에 의해 θ_R로 회전이동 된다.

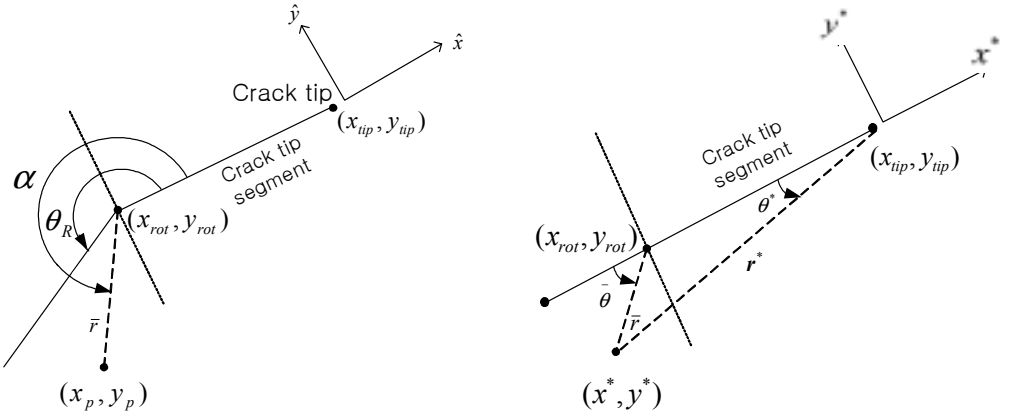


그림 3.6 Coordinate mapping used for kinked crack

여기서, θ_R은 최종 균열선분과 그 전단계 균열선분이 이루는 각도이고, α는 최종 균열선분과 꺾인점 (x_{rot}, y_{rot})에서 대상점(x,y)까지의 각도이다. 이때 $\hat{\theta} = \alpha - \theta_R$이라 하고 $\bar{r} = \sqrt{(x-x_{rot})^2 + (y-y_{rot})^2}$이다. 그러면 새로운 각도 $\bar{\theta}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \dfrac{\hat{\theta}}{\frac{3\pi}{2} - \theta_R} \times \dfrac{\pi}{2} = \hat{\theta} C_b & (\hat{\theta} > 0) \\ \dfrac{\hat{\theta}}{\theta_R - \frac{\pi}{2}} \times \dfrac{\pi}{2} = \hat{\theta} C_a & (\hat{\theta} < 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

여기서, 계수는 아래의 식 (3.6a), 식 (3.6b)와 같다.

$$C_b = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2} - \theta_R} \tag{3.6a}$$

$$C_a = \frac{\frac{\pi}{2}}{\theta_R - \frac{\pi}{2}} \tag{3.6b}$$

이것은 mapping 된 좌표계에서 절점의 좌표를 결정하기 위해 사용된다. 또한 식 (3.7a)와 식 (3.7b)는 이와 같이 mapping 된 좌표들의 r^*와 θ^*를 계산하기 위해 사용되며 이것은 다시 (x,y)에서의 확장된 영역을 계산하기 위해 사용된다.

$$x^* = x_{rot} - \bar{r}\cos\bar{\theta} - x_{tip} \tag{3.7a}$$

$$y^* = y_{rot} - \bar{r}\sin\bar{\theta} - y_{tip} \tag{3.7b}$$

실제적인 수치해석 프로그램 수행시 (x^*, y^*)에 대한 미분값들의 사용이 계산과정에 포함되어 있으므로 원래의 균열선단 좌표계 (x,y)에 대한 미분값을 얻는 과정이 필요하다. 이는 식 (3.7)을 이용하여 연쇄법칙(chain rule)에 의해 다음과 같이 계산된다.

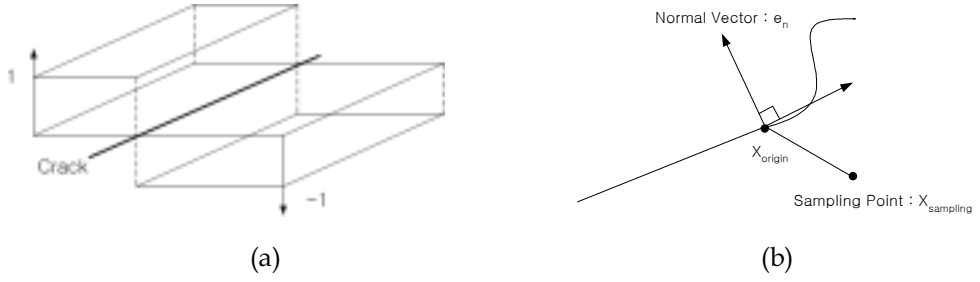
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\bar{\theta}\cos\alpha - \sin\bar{\theta}\sin\alpha C_l & -\sin\bar{\theta}\cos\alpha + \cos\bar{\theta}\sin\alpha C_l \\ -\cos\bar{\theta}\sin\alpha + \sin\bar{\theta}\cos\alpha C_l & -\sin\bar{\theta}\sin\alpha - \cos\bar{\theta}\cos\alpha C_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^*} \\ \frac{\partial}{\partial y^*} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

여기서, $C_l = C_a$ 또는 C_b인데 이것은 $\bar{\theta}$의 부호에 따라 바뀌는 값이므로 주의해야 한다.

3.1.3 균열면의 불연속성 모형화

기존 유한요소해석기법에서 사용되었던 기저함수는 요소내(inter-element)에서 균열로 인한 변위 및 응력에서 발생하는 불연속성을 표현할 수 없다. 이는 전체 해석영역에 대하여 수학적으로 동일한 개념의 기저함수를 사용하였기 때문에 균열과 같은 국부적 특이성의 자유로운 표현 및 반영이 불가능하기 때문이다. 이를 위하여 기존에는 해석대상체에 존재하는 균열을 해석하기 위해서 요소망(mesh)을 불연속적으로 구성하는 방법을 이용하였다.

그러나, 본 연구에서는 단위분할법의 개념을 근간으로 하여 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있는 기저함수를 활용함으로써 요소망 제약조건 없이 요소내에서의 불연속성 표현이 가능하도록 하였다. 불연속 기저함수는 균열로 인하여 발생하는 변위 및 응력의 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있도록 균열면을 경계로 양·음의 단위값을 갖는 계단함수(step function)의 형태를 취한다. 이는 수학적으로 불연속성을 표현할 수 있는 가장 간단한 방법으로서 그림 3.7(a)와 같은 형태를 갖으며 그 값의 정의는 그림 3.7(b)와 같은 국부좌표계에서 식 (3.9)와 같이 정의된다.



(a) (b)

그림 3.7 (a) Schematic of discontinuous function for representing discontinuity of crack (b) Local coordinate to define discontinuous function

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} +1 & \text{for } (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)\cdot \boldsymbol{e_n} > 0 \\ -1 & \text{for } (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)\cdot \boldsymbol{e_n} < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

이와 같은 계단함수는 식 (3.10)과 같이 기존 유한요소법에서 사용되었던 근사 변위함수에 추가적으로 사용되어 요소망의 불연속한 구성에 의존하지 않고 요소 내에서도 변위 및 응력의 불연속성을 묘사할 수 있게 된다. 특히 추가확장에 사용되는 절점은 기존의 요소망에 새로운 절점을 추가하여 사용하지 않고, 균열의 불연속성을 묘사할 필요가 있는 요소의 절점, 즉 균열에 의하여 관통된 요소의 기존 절점을 사용함으로써 추가적인 계산량이 매우 작은 효율성을 보인다.

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in I} N_i(\boldsymbol{x}) d_i + \sum_{j\in J} N_j(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a_j = \boldsymbol{Nd} + \boldsymbol{NHa} \tag{3.10}$$

위의 식에서 I는 해석대상체내의 모든 절점이며, J는 균열이 관통하는 요소의 절점을 나타낸다. 또한 $N_i(\boldsymbol{x})$ 은 기존의 유한요소법에서 사용되었던 일반적인 형태의 형상함수이고, $N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$ 는 계단함수를 적용하여 불연속성을 표현한 추가적인 형상함수를 나타낸다. 불연속 기저함수를 이용하여 확장을 수행할 절점 J에 대한 보다 상세한 정의는 다음과 같다. 우선 해석대상체 내에서 요소망을 구성하고 있는 임의의 절점은 그림 3.8과 같은 compact support를 갖으며 이를 w로 나타낸다.

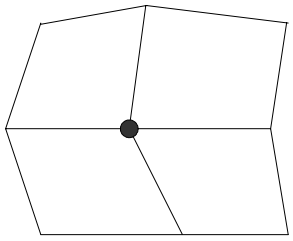


그림 3.8 Compact support of a node

이때 compact support란 해당 절점에서 구성되는 기저함수가 0이 아닌 값(non-zero value)을 갖는 최소영역을 말한다. 이를 이용하여 불연속 함수로 확장되어야 할 절점 J는 다음과 같이 정의된다.

$$J=\{j\in I : w_j \cap D\neq \emptyset\} \tag{3.11}$$

여기서, D는 내부불연속 경계 Γ_d가 갖는 형상(geometry)이다. 결국 J절점을 정의하는 식 (3.11)은 그림 3.9와 같이 해석대상체 내의 절점중 해당 절점의 compact support 와 Γ_d가 교차하는 절점으로서 작은 사각형으로 표시하였다.

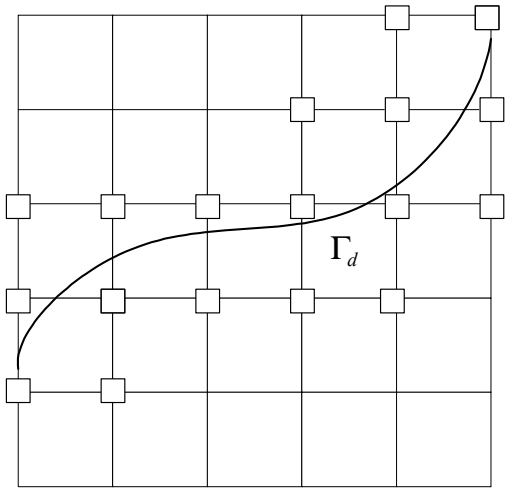


그림 3.9 The squared nodes are enriched by a discontinuous function

이와 같은 방법은 해석대상체 내에 여러 개의 균열이 위치한 경우에도 식 (3.12)와 같이 불연속을 표현하기 위한 항을 추가해 줌으로 다수균열에 대한 용이한 확장이 가능하다.

$$\begin{aligned} u^h(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i\in I} N_i(\boldsymbol{x}) d_i + \sum_{j\in J_1} N_j(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a^1{}_j + \sum_{j\in J_2} N_j(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a^2{}_j \\ &= \boldsymbol{Nd} + \boldsymbol{NH}^1 \boldsymbol{a}^1 + \boldsymbol{NH}^2 \boldsymbol{a}^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

여기서, J_1과 J_2는 각각 내부불연속경계 Γ_{d1}과 Γ_{d2}에 의하여 확장되는 절점을 의미한다. 이때, 추가적인 형상함수 $N_i(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$는 실제 수치해석프로그램 구현시 새

로운 형상함수를 정의하여 사용하지 않고 다만 기존의 형상함수를 이용하여 적분점에서 사용하는 가중함수의 부호를 균열면의 상하부의 위치에 따라 결정해 줌으로써 손쉽게 구성할 수 있다.

3.1.4 균열선단의 응력특이성 모형화

균열의 선단에서는 응력집중으로 인한 응력특이성이 발생하며, 이를 표현하기 위하여 기존의 유한요소해석기법에서는 균열선단주변에 특이요소(singular element)를 사용하였다. 그러나 특이요소의 사용 역시 균열선단이 요소내에 위치하였을 경우에는 특이성의 반영이 불가능하여 특이요소의 절점에 균열 선단이 위치하도록 요소망을 재구성 해야하는 제약조건이 있었다. 따라서 본 연구에서는 앞의 절에서 제시한 방법과 유사하게 균열선단의 특이성을 반영할 수 있는 특이기저함수를 제안하고 필요한 부분에 국부적으로 사용함으로써 응력특이성을 요소망 제약조건 없이 표현할 수 있도록 하였다. 일반적인 혼합모드상태의 하중재하시 발생하는 균열선단의 변위장은 식 (3.13)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}[\varkappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}] \\ \sin\frac{\theta}{2}[\varkappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}] \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}[\varkappa + 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}] \\ -\cos\frac{\theta}{2}[\varkappa - 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}] \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

여기서, K_I과 K_{II}는 응력확대계수이며 μ와 $\varkappa$는 재료특성값(material properties)으로서 다음과 같이 계산된다.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \varkappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{for } \textit{plane strain} \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{for } \textit{plane stress} \end{cases} \tag{3.14}$$

기존의 일반적인 유한요소법에서 사용되던 기저함수는 식 (3.13)으로 표현되는 균열선단의 특이거동(singular behavior)을 수학적으로 정확히 표현할 수 없었기 때문에 특이요소 등을 사용하는 방법으로 이를 해결하였다. 따라서, 이와 같은 특이거동을 표현 할 수 있는 추가적인 기저함수를 개발하고 이를 단위분할법 개념에 입각하여 도입한다면 요소내에서도 자유로운 특이거동의 묘사가 가능해진다. 이를 위하여 균열선단 주변에서 발생하는 특이성을 반영할 수 있는 식 (3.15)와 같은 4개의 특이기저함수를 사용하였다.

$$g(\boldsymbol{x}) = \{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\} \tag{3.15}$$

이 4개의 특이기저함수는 그림 3.10과 같이 균열선단을 원점으로 하여 정의된 국부좌표계상의 r, θ 에 대한 함수이다.

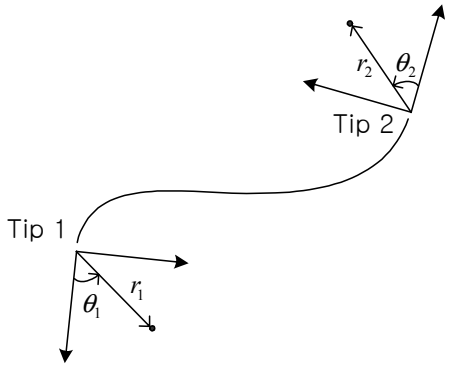
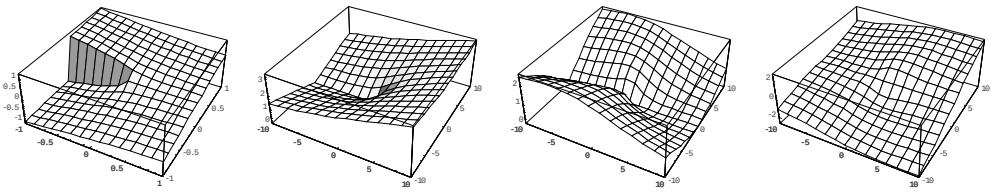


그림 3.10 Local axes for the polar coordinate at the crack tips

또한 이 함수들은 균열이 요소의 좌측중앙부로부터 시작하여 그 선단이 중앙에 위치하였을 경우 요소 내에서 그림 3.11과 같은 형태를 가지고 있으며 선형조합을 통하여 균열선단의 변위를 나타내는 이론해를 완전히 표현할 수 있도록 선택하였다.



(a) $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ (b) $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$ (c) $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$ (d) $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$

그림 3.11 The shapes of four singular basis functions used for crack tip element

이 함수들은 국부적으로 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수에 더해져서 사용되어 변위의 근사에 대해서는 $\sqrt{r}$성분을 표현하며 미분값인 응력 성분에 대해서는 $1/\sqrt{r}$을 표현할 수 있도록 제안된 것이다. 이는 기존의 개선된 EFGM(Element Free Galerkin Method)에서 사용되었던 특이기저함수(Fleming 등, 1997)와 동일한 형태를 취하고 있다. 이를 이용하여 단위분할법의 개념에 따라 식(3.16)과 같이 기존 유한요소법의 근사변위함수를 확장하면 요소망 제약조건 없이 균열선단의 특이성을 요소 내에서도 표현할 수 있다. 또한, 확장에 관련된 식들이 모두 균열선단이 위치한 요소의 절점 위에서만 추가적으로 고려되므로 균열선단의 위치에 따라 국부적으로 자유롭게 확장할 수 있다.

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in I} N_i(\boldsymbol{x})d_i + \sum_{k\in K}\sum_{l=1}^{4} N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})b_{kl} = \boldsymbol{Nd} + \boldsymbol{Ngb} \qquad (3.16)$$

여기서, I는 전체절점을 뜻하며, K는 전체절점중 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한, $N_i(\boldsymbol{x})$은 기존의 형상함수이며 $N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})$는 균열선단의 특이

성을 표현할 수 있도록 제안된 추가적인 특이형상함수이다. 또한 균열선단의 위치를 $x_{crack\ tip}$이라 할때 특이거동 표현을 위하여 확장이 필요한 K절점에 대한 정의는 다음과 같다.

$$K = \{k \in I : x_{crack\ tip} \in \overline{w_k}\} \tag{3.17}$$

이는 그림 3.12의 원형으로 표현된 절점과 같이 균열선단이 해당 절점의 compact support 내에 있는 절점을 의미하며 결국에는 선단이 위치한 요소를 구성하는 절점을 뜻한다.

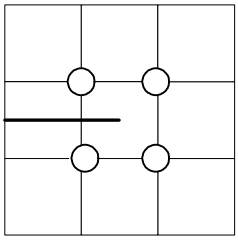


그림 3.12 The circled nodes are enriched by singular functions

본 확장기법 역시 앞에서 제시하였던 확장기법과 동일하게 여러 개의 균열선단을 갖는 해석대상체에 대하여 식 (3.18)과 같이 각각의 균열선단에 대한 부분적 확장을 수행함으로써 다수의 균열선단에 대하여 손쉬운 확장이 가능하다.

$$\begin{aligned} u^h(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i \in I} N_i(\boldsymbol{x}) d_i + \sum_{k \in K_1} \sum_{l=1}^{4} N_k(\boldsymbol{x}) g_l^1(\boldsymbol{x}) b^1{}_{kl} + \sum_{k \in K_2} \sum_{l=1}^{4} N_k(\boldsymbol{x}) g_l^2(\boldsymbol{x}) b^2{}_{kl} \\ &= \boldsymbol{Nd} + \boldsymbol{Ng}^1 \boldsymbol{b}^1 + \boldsymbol{Ng}^2 \boldsymbol{b}^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

여기서, K_1과 K_2는 각각의 균열선단이 compact support 내에 포함된 절점을 의미하며, $\boldsymbol{Ng}^1$, $\boldsymbol{Ng}^2$ 역시 각각의 균열선단의 특이성 반영을 위해 도입되는 특이 기저함수이다.

3.2 원홀의 모형화

임의의 해석대상체에 분포하는 원홀(hole)의 방정식을 $f^h(\boldsymbol{x})$라 하면, 이때 원홀은 이를 나타내는 식 $f^h(\boldsymbol{x})$에 의하여 해석대상체를 홀의 내부영역 Ω_b $(f^h(\boldsymbol{x})<0)$와 외부영역 $\Omega_a\,(f^h(\boldsymbol{x})>0)$ 및 이 두 영역간의 경계 $\Gamma_c\,(f^h(\boldsymbol{x})=0)$로 분할한다. 구조체 내부에 존재하는 원홀의 국부적 특이거동을 해석과정에 반영하기 위해서는 앞의 절에서 제시되었던 방법과 유사한 형태로 제안된 추가의 기저함수가 필요하며, 이 기저함수는 실제적인 해석을 수행함에 있어서 원홀의 내부영역인 Ω_b를 약형식의 적분영역에서 제외시킴과 동시에 변위 및 응력상의 불연속성을 표현하는 역할을 수행한다. 이를 위하여 식 (3.19)와 같이 정의되는 함수 $\Psi(\boldsymbol{x})$를 도입한다.

$$\Psi(\boldsymbol{x})=\begin{cases} +1 & \text{for } f^h(\boldsymbol{x})>0 \\ 0 & \text{for } f^h(\boldsymbol{x})<0 \end{cases} \tag{3.19}$$

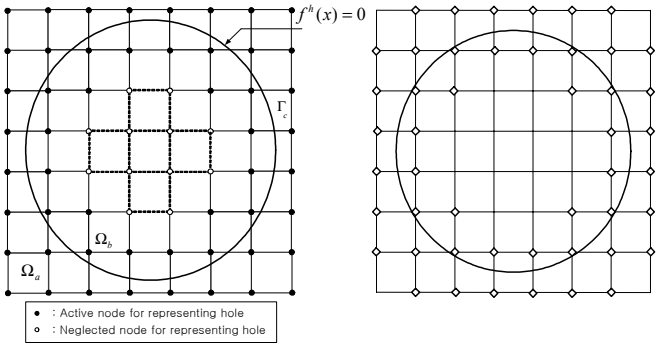
여기서, $\Psi(\boldsymbol{x})$는 홀의 내부에서는 0의 값을 갖고 그 외부에서는 단위값을 갖는 계단함수(step function)이다. 이와 같은 함수를 이용하여 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위 함수를 앞의 절에서 제시하였던 방법과 유사한 형태로 확장하면 식 (3.20)과 같은 형태의 확장근사변위함수를 도출할 수 있다.

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in I}N_i(\boldsymbol{x})d_i+\sum_{l\in L}N_l(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})c_l=\boldsymbol{Nd}+\boldsymbol{N\Psi c} \tag{3.20}$$

여기서, $N_i(\boldsymbol{x})$는 기존의 형상함수 이며 $N_l(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})$는 홀로 인한 국부적 특성을 반영할 수 있도록 제안된 추가의 확장기저함수이다.

이 확장근사변위함수를 이용하면 기존의 유한요소법과는 달리 요소망을 불연속 적으로 구성해야한다는 제약조건 없이 해석대상체에 분포하는 원홀로 인한 영

향을 반영할 수 있다. 이는 그림 3.13(a)에서와 같이 홀로 인한 해석대상체의 불연속성을 표현하기 위하여 사용되는 절점(active nodes)과 사용되지 않는 절점(neglected nodes)을 구별하여 단위분할법의 개념에 따라 추가적인 계산을 수행하는 형태를 띠고 있으며, 그림 3.13(b)의 다이아몬드형으로 표시된 절점들에 한하여 기존의 절점을 이용한 추가 계산을 수행한다.



(a) (b)

그림 3.13 (a) The enrichment technique for hole (b) The diamonded nodes are enriched by the unit/zero value step function

이와 같은 추가적 계산이 요구되는 절점의 집합을 L이라 하면, 이 절점들의 집합은 식 (3.21)과 같이 정의된다.

$$L=\{\, l\in I : w_l \cap C \neq 0\} \tag{3.21}$$

여기서, I는 해석대상체에 존재하는 전체절점의 집합을 뜻하며 C는 홀의 경계 Γ_c가 갖는 형상(geometry)을 의미한다. 따라서 L은 전체절점 중 compact support가 원홀의 경계 Γ_c와 교차하는 절점으로 구성된 집합이다. 단, 어떤 절점의 compact support 전체가 원홀의 내부영역 Ω_b에 포함될 경우에는 이 절점의 자유도 자체를 제거함으로써 추가 계산량을 최소화 할 수 있다.

3.3 확장유한요소법의 정식화

본 절에서는 앞에서 제안한 국부적 특성을 반영할 수 있는 추가의 기저함수를 이용하여 해석대상체 내에 분포하는 불연속면을 요소망 제약조건 없이 모형화할 수 있는 방법을 제안하였다. 이를 위하여 그림 3.14와 같은 원홀과 균열이 있는 일반적인 해석대상체를 가정한다.

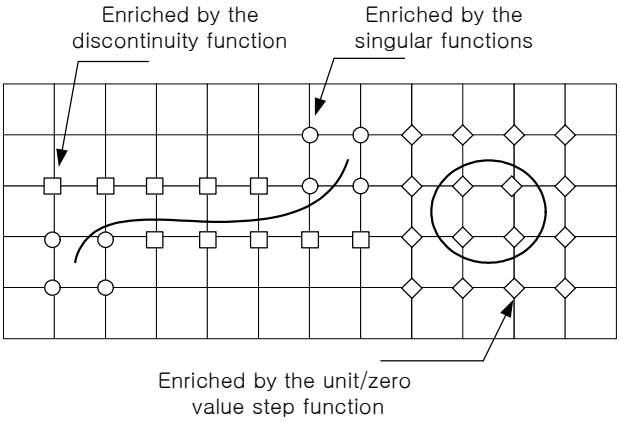


그림 3.14 The enrichment strategy to represent local characteristic behavior

이 해석대상체에 대하여 추가적인 확장이 필요한 절점의 집합을 각각 J, K, L이라 하면 J는 불연속을 표현하기 위한 계단함수가 적용될 절점으로서 위의 그림에서 원으로 표현된 절점이며, K_1, K_2는 각각 균열선단들의 특이성의 반영이 필요한 사각형으로 표시된 절점이다. 또한 L은 해석시 원홀의 특성을 반영해야 하는 다이아몬드로 표현된 절점이다. 이 절점들에 대한 세부적 정의는 식 (3.22), 식 (3.23) 및 식(3.24)와 같다.

$$K_1 = \{k \in I : x_1 \in \overline{w_k}\} \tag{3.22a}$$

$$K_2 = \{k \in I : x_2 \in \overline{w_k}\} \tag{3.22b}$$

$$J=\{j\in I : w_j \cap D\neq 0, j\notin K_1, j\notin K_2\} \tag{3.23}$$

$$L=\{l\in I : w_l \cap C\neq 0\} \tag{3.24}$$

앞에서 제안한 균열면과 선단의 국부적 특성을 반영 할 수 있는 각각의 특이 기저함수를 사용하여 최종적으로 확장된 근사변위함수는 식 (3.25)와 같다.

$$\begin{aligned} u^h(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i\in I} N_i(\boldsymbol{x}) d_i + \sum_{l\in L} N_l(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x}) c_l + \sum_{j\in J} N_j(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a_j \\ &\quad + \sum_{k\in K_1}\sum_{l=1}^{4} N_k(\boldsymbol{x}) g_l^1(\boldsymbol{x}) b^1_{kl} + \sum_{k\in K_2}\sum_{l=1}^{4} N_k(\boldsymbol{x}) g_l^2(\boldsymbol{x}) b^2_{kl} \\ &= \boldsymbol{Nd} + \boldsymbol{N\Psi c} + \boldsymbol{NHa} + \boldsymbol{Ng}^1\boldsymbol{b}^1 + \boldsymbol{Ng}^2\boldsymbol{b}^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

여기서, I는 해석대상체 내의 전체 절점이며 L은 홀에 의하여 관통된 요소의 절점을 의미하고 J와 K는 각각 균열에 의해서 관통된 요소의 절점과 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한, $N_i(\boldsymbol{x})$은 기존의 유한요소법에서 사용되었던 일반적인 형태의 기저함수이고, $N_l(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})$, $N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$와 $N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})$는 앞에서 제안된 특이기저함수들이다. 식 (3.26)은 근사변위함수의 이산화된 미분을 나타내며 계방정식의 최종해를 찾은 후 해석대상체 내의 응력을 산정할 때 사용한다.

$$\begin{aligned} u,_i^h(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i\in I} N_{i,i}(\boldsymbol{x}) d_i + \sum_{l\in L} N_{l,i}(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x}) c_l + \sum_{j\in J} N_{j,i}(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a_j \\ &\quad + \sum_{k\in K}\sum_{l=1}^{4} [\, N_{k,i}(\boldsymbol{x}) g_l(\boldsymbol{x}) + N_k(\boldsymbol{x}) g_{l,i}(\boldsymbol{x})] b_{kl} \\ &= \boldsymbol{Bd} + \boldsymbol{B\Psi c} + \boldsymbol{BHa} + (\boldsymbol{Bg} + \boldsymbol{Nh})\boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{3.26}$$

식 (3.25)와 식 (3.26)을 앞에서 제시한 2차원 선형탄성문제의 지배방정식으로부터 유도한 약형식 식 (2.13)에 대입하여 Galerkin 방법에 따라 이산화하여 얻은 최종적인 계방정식의 형태는 식 (3.27)와 같으며, 각각을 구성하는 성분들은 식 (3.28)~식 (3.41)과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IL} & K_{IJ} & K_{IKn} \\ K_{IL}^{T} & K_{LL} & K_{LJ} & K_{LKn} \\ K_{IJ}^{T} & K_{LJ}^{T} & K_{JJ} & K_{JKn} \\ K_{IKn}^{T} & K_{LKn}^{T} & K_{JKn}^{T} & K_{KKnm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_I \\ c_L \\ a_J \\ b_{Kn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_I \\ f_L \\ f_J \\ f_{Kn} \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

$$K_{II} = \int_{\Omega} B_I^T \; D \; B_I \; d\Omega \tag{3.28}$$

$$K_{IL} = \int_{\Omega} B_I^T \; D \; B_L \Psi \; d\Omega \tag{3.29}$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T \; D \; B_J H \; d\Omega \tag{3.30}$$

$$K_{IKn} = \int_{\Omega} B_I^T \; D \; (B_K g_n \; + \; N_K g_{n,i}) \; d\Omega, \quad n = 1, \cdots, 4 \tag{3.31}$$

$$K_{LL} = \int_{\Omega} (B_L \Psi)^T \; D \; B_L \Psi \; d\Omega \tag{3.32}$$

$$K_{LJ} = \int_{\Omega} (B_L \Psi)^T \; D \; B_J H \; d\Omega \tag{3.33}$$

$$K_{LKn} = \int_{\Omega} (B_L \Psi)^T \; D \; (B_K g_n \; + \; N_K g_{n,i}) \; d\Omega, \quad n = 1, \cdots, 4 \tag{3.34}$$

$$K_{JJ} = \int_{\Omega} (B_J H)^T \; D \; B_J H \; d\Omega \tag{3.35}$$

$$K_{JKn} = \int_{\Omega} (B_J H)^T \; D \; (B_K g_n \; + \; N_K g_{n,i}) \; d\Omega, \quad n = 1, \cdots, 4 \tag{3.36}$$

$$K_{KKnm} = \int_{\Omega} (B_K g_n + N_K g_{n,i})^T D (B_K g_m + N_K g_{m,i}) \; d\Omega, \quad n, m = 1, \cdots, 4 \tag{3.37}$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} N_I^T \bar{t} \; d\Gamma \; + \; \int_{\Omega} N_I^T b \; d\Omega \tag{3.38}$$

$$f_L = \int_{\Gamma_t} (N_L \Psi)^T \bar{t} \; d\Gamma \; + \; \int_{\Omega} (N_L \Psi)^T b \; d\Omega \tag{3.39}$$

$$f_J = \int_{\Gamma_t} (N_J H)^T \bar{t} \; d\Gamma \; + \; \int_{\Omega} (N_J H)^T b \; d\Omega \tag{3.40}$$

$$f_{Kn} = \int_{\Gamma_t} (N_K g_n)^T \bar{t} \; d\Gamma \; + \; \int_{\Omega} (N_K g_n)^T b \; d\Omega, \quad n = 1, \cdots, 4 \tag{3.41}$$

본 연구에서 제안된 근사변위함수는 불연속성을 표현하기 위한 불연속기저함수와 균열선단의 특이성을 반영하기 위한 특이기저함수를 사용하였지만, 단위분할법의 개념에 따라 근사변위함수에 추가적으로 적용하였으므로 절점의 재배치나 추가·삭제의 과정이 필요없다. 이는 균열이 성장하는 과정에 대한 해석을 수행하더라도 요소망 제약조건이 없이 일반적인 요소망을 사용할 수 있음을 뜻한다.

제4장 균열진전해석을 위한 알고리즘

4.1 파괴역학의 계수결정

균열이 포함된 해석대상체를 대상으로 개발한 수치해석프로그램의 정확성을 검증하거나 균열진전해석을 수행하기 위해서는 파괴역학의 계수를 수치적으로 계산하고 결정하는 과정이 필요하다. 유한요소법과 같은 수치해석기법을 사용할 때는 일반적으로 알려진 선적분형태의 J적분법을 사용하여 응력확대계수를 계산하는 것은 정확도나 효율성 측면 모두에서 몇가지 문제점을 내포하고 있다. 따라서 본 절에서는 Yau 등(1980)과 Shih와 Asaro(1988)에 의해 제시된 혼합파괴모드에 대한 영역적분형태의 교차적분(interaction domain integral)을 이용하여 응력확대계수의 수치적 산정을 위한 정식화 과정과 해석방법을 제시한다.

4.1.1 영역적분형태의 교차적분 정식화

일반적인 혼합모드에 대하여 식(4.1)과 같은 J적분과 응력확대계수 간의 관계가 있음은 이미 알려진 사실이다.

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \tag{4.1}$$

여기서, E'은 탄성계수 E와 포아송비 ν의 함수로써 다음과 같은 값을 갖는다.

$$E' = \begin{cases} E & \text{for } \textit{plane stress} \\ \dfrac{E}{1-\nu^2} & \text{for } \textit{plane strain} \end{cases} \tag{4.2}$$

이때 해석대상체에 대하여 2개의 상태를 가정한다. 즉, 현재 균열이 분포하는 해석대상체의 역학적 상태를 상태1 ($\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$)이라 하고 추가적인 가상의 역학적 상태(auxiliary state)를 상태2 ($\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$)라 하면 J적분은 모드 I 과 모드 Ⅱ중에서 각각 선택된 상태1과 상태 2에 대하여 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \Big[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} \\ - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \Big] n_j \, d\Gamma \end{aligned} \tag{4.3}$$

이 식을 정리하여 다시 표현하면 다음과 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1+2)} \tag{4.4}$$

여기서, $J^{(1)}, J^{(2)}$는 각각 상태 1과 상태 2의 J적분 값이며, $I^{(1+2)}$는 이 두 상태의 교차적분 값이다. 이때 $I^{(1+2)}$에 대한 수식은 다음과 같이 정의된다.

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \Big[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial_i^{(1)}}{\partial x_1} \Big] n_j \, d\Gamma \tag{4.5}$$

여기서, $W^{(1,2)}$는 교차상태의 변형에너지(strain energy)이다. 따라서 이는 다음의 식 (4.6)과 같이 계산된다.

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{4.6}$$

또한 식 (4.4)를 이용하여 교차적분된 형태로 표현하면 다음과 같이 표현된다.

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'}(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) \tag{4.7}$$

이때 가상상태 즉 상태 2를 순수 파괴모드 I의 상태로 가정하면 이로 인하여 $K_I^{(2)} = 1, K_{II}^{(2)} = 0$이 되므로, 결국 식 (4.8)과 같은 각각의 상태에 대한 가정을 통하여 현재상태, 상태 1, 에 대한 모드 I 의 응력확대계수를 구할 수 있다.

$$K_I^{(1)} = \frac{2}{E'} I^{(state\ 1,\ state\ 2 = mode\ I)} \tag{4.8}$$

마찬가지 방법으로 식 (4.9)를 이용하면 현재상태의 모드 II에 대한 응력 확대계수를 구할 수 있다.

$$K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E'} I^{(state\ 1,\ state\ 2 = mode\ II)} \tag{4.9}$$

이는 결국 상태 1과 상태 2의 교차적분을 통하여 가상상태인 상태2를 어떠한 상태로 가정하느냐에 따라 현재상태인 상태1의 응력확대계수를 손쉽게 산정할 수 있음을 의미하는 것이다.

그러나 식 (4.5)와 같이 선적분(contour integral)형태로 제안된 식은 실제적인 유한요소법에 적용하기에는 최적화된 상태라 할 수 없다. 이를 위하여 적분역영내에서 가중함수 $q(\boldsymbol{x})$를 정의하여 영역적분 형태로 변환하는 것이 필요하다. 가중함수 $q(\boldsymbol{x})$는 그림 4.1과 같이 균열선단에서는 단위값(unit value)을 갖고 적분영역의 경계인 c_0에서는 0이 되는 함수로써 이를 수식으로 표현하면 식 (4.10)과 같이 정의된 함수이다.

$$q(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & on\ \Gamma \\ 0 & on\ c_0 \\ arbitary & otherwise \end{cases} \tag{4.10}$$

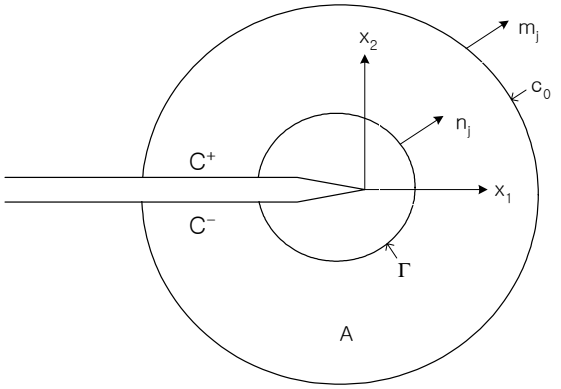


그림 4.1 Schematic of conventions at crack tip

따라서 균열면이 영역 A에서 직선이고 c_0에 의하여 영역적분을 수행하는 경계가 정의되었다고 가정하면 이 구간 내에서 정의되는 교차적분은 식 (4.11)과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} = & \int_c [\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j}] q m_j \, dC \\ & - \int_{C_+ + C_-} [\sigma_{i2}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{i2}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}] q m_2 \, dC \end{aligned} \tag{4.11}$$

여기서, $C = \Gamma + C_+ + C_- + C_0$이고 $\boldsymbol{m}$은 적분 영역에 수직인 벡터이다. 또한 $m_j = n_j \ on \ \Gamma$이고 $m_j = n_j \ on \ C_0, C_+$ and C_-이며, $m_1 = 0 \ on \ C_+$ and C_-이다. 이때 발산정리(divergence theorem)를 적용하면 다음과 같은 영역적분 형태의 교차적분식을 최종적으로 유도하게 된다.

$$I^{(1,2)} = \int_A [\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_j} \; dA - \int_{C_+ + C_-} [\sigma_{i2}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{i2}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}] q m_2 \; dC \tag{4.12}$$

그런데 균열면에서는 표면력이 0이므로 (tracktion-free) $\sigma_{i2}^{(2)} m_2, \; i = 1,2$는 실제적으로는 계산할 필요가 없다. 따라서 최종적으로 유도된 영역적분 형태의 교차적분식은 식 (4.13)과 같다.

$$I^{(1,2)} = \int_A [\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j}] \frac{\partial q}{\partial x_j} \; dA \tag{4.13}$$

4.1.2 교차적분의 수치적 수행

앞절에서 제시된 교차적분식의 수치적 계산은 다음과 같은 단계에 따라 수행된다.

1) 영역적분 반경산정

균열선단을 기준으로 적분영역의 반경을 산정함으로서 영역적분에 포함될 요소를 정의한다. 물론 영역적분형태의 교차적분을 통하여 구해진 응력확대계수 역시 경로독립성(path-independency)이 성립하지만 너무 넓은 적분영역을 산정하면 계산시간의 측면에서 비효율적이며, 반대로 너무 좁은 적분경로는 균열선단에서 발생한 응력특이성을 충분히 반영해 줄 수 없기 때문이다. 이를 위하여 본 연구에서는 균열선단을 포함하고 있는 요소의 넓이를 바탕으로 적분영역을 산정하기 위한 특성길이(characteristic length) r_d를 식 (4.14)와 같이 정의하였다.

$$r_d = 2.0 \times \sqrt{Area_{\; crack\ tip\ ele}} \tag{4.14}$$

위의 식은 응력특이성을 반영하기 위하여 특이기저함수를 사용한 요소의 영향영역이 충분히 반영될 수 있도록 산정된 값이다.

2) 가중함수 $q(x)$구성

본 교차적분은 영역적분 형태로 계산이 수행되므로 이를 위한 적분영역내의 가중함수 $q(x)$를 정의해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 적분영역에 포함되는 절점에서 정의된 형상함수를 조합하여 사용함으로써 별도의 가중함수산정을 위한 계산이 없도록 하였다. 이를 위하여 그림 4.2와 같이 정의된 적분영역에 대하여 적분반경내에 포함된 절점에 대해서만 형상함수를 고려하는 방법을 통하여 가중함수 $q(x)$를 정의할 수 있게 된다.

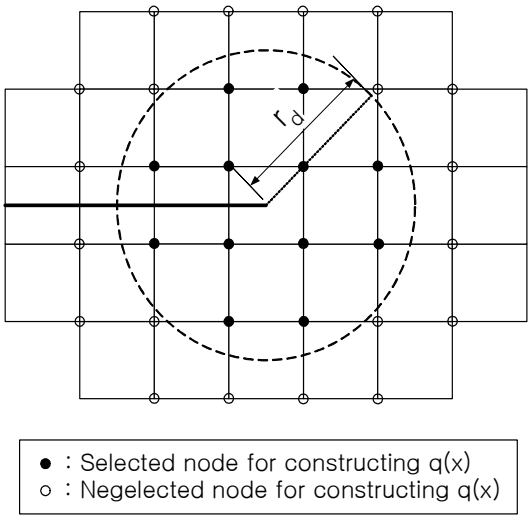


그림 4.2 The selected nodes about crack tip for constricting weighting function

3) 영역 내에서의 적분수행

먼저 균열이 경사진 경우 균열선단에 대하여 경사각을 산정해야 한다. 이는 교차적분중 필요한 $q(x)$ 및 모든 값들이 균열선단 기준으로 정의된 국부좌표계를

사용하여 계산이 되는 반면 실제적인 계산에서는 이 국부좌표계를 다시 전체좌표계로 회전이동한 후 그 값을 사용하여야 하기 때문이다. 또한 앞에서 유도되었던 교차적분식 식 (4.13)을 이용하여 적분영역내의 각각의 적분점에 대한 값을 모두 합산함으로써 적분을 수행한다. 이때 최종적으로 도출해내고자 하는 응력확대계수의 파괴모드에 따라 보조영역을 적절히 선택하여 요구되는 $I^{(1,2)}$의 값을 구한다.

4) 모드Ⅰ와 모드Ⅱ에 대한 응력확대계수 계산

위의 과정에서 적절한 보조영역에 대하여 계산된 $I^{(1,2)}$의 값을 식 (4.8) 및 식 (4.9)에 대입함으로써 파괴모드Ⅰ과 Ⅱ에 해당하는 응력확대계수를 계산한다.

4.2 균열진전의 수치적 계산

수치해석기법을 이용하여 피로균열진전에 대한 해석을 수행하기 위해서는 균열의 진전각, 진전량 등의 수치적 계산과 적용이 필요하다. 이를 위하여 그림 4.3과 같이 균형진전을 위한 모형을 가정한다. 본 모형은 균열이 진전한 n^{th} 단계이후 $(n+1)^{th}$ 단계에서의 균열성장길이 Δa^{n+1}과 균열성장각 θ^{n+1}에 대한 정의를 나타내는 것으로서 각각에 대한 수치적 산정은 다음과 같은 이론에 따른 수치적 계산을 통하여 이루어진다.

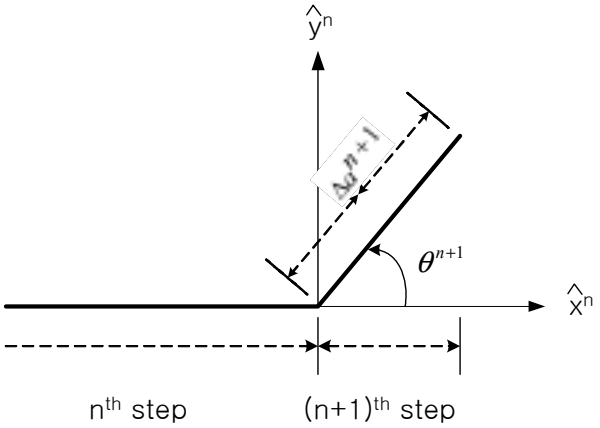


그림 4.3 Schematic of discrete crack segments

4.2.1 균열의 성장방향 결정

균열진전을 모형화하기 위해서는 균열성장방향을 예측하기 위한 이론이 필요하다. 일반적으로 사용되는 균열진전방향은 다음과 같은 이론들을 바탕으로 이루어진다.

1) 최대주응력 한계론(Erodogen과 Shi, 1963)
   : 최대 주응력에 수직인 방향으로 균열이 성장한다고 가정
2) 최소변형에너지밀도 한계론(Sih, 1974)
   : 최소변형에너지가 최대가 되는 방향의 직각으로 균열이 성장
3) 최대에너지해방률 한계론(Nuismer, 1975)
   : 최대에너지해방률이 최대가 되는 방향으로 균열이 진전

이중 처음의 2가지 방법론은 균열진전을 고려하기 이전까지의 균열에 대한 정보만을 가지고 계산이 가능한 반면 나머지 방법론은 반복적 계산이 필요하며 이에 따른 섭동(perturbation)이 발생한다(Sumi, 1985). 또한 최대에너지해방률 한계론은 균열의 한 단면에서의 정적인 해석에는 이상적으로 균열의 성장방향을 예측할 수 있지만 균열이 계속 진전되는 문제의 해석에는 정확한 균열성장방향을 예측할 수 없는 문제가 발생한다.

따라서, 본 연구에서는 균열의 진전방향을 계산하기 위하여 최대주응력 한계론을 사용하였는데, 이 이론에서 균열은 최대 hoop 응력($\sigma_{\theta\theta}$)에 직각인 방향으로 진전한다고 가정한다. 일반적인 혼합모드의 경우 균열선단주변에서 응력은 식(4.15)에 의하여 산정되는데 최대 hoop 응력의 방향은 전단응력이 0이되는 방향을 계산함으로써 산정할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} K_I(1+\sin^2\frac{\theta}{2}) + K_{II}\frac{(3}{2}\sin\theta - 2\tan\frac{\theta}{2}) \\ K_I\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{II}\sin\theta \\ \frac{1}{2}K_I\sin\theta + \frac{1}{2}K_{II}(3\cos\theta - 1) \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

따라서, 식 (4.15)의 $\sigma_{r\theta}$항을 0이 되도록 하는 조건식 식(4.16)과 같은 식의 값을 구해야 한다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{2}K_I\sin\theta+\frac{1}{2}K_{II}(3\cos\theta-1)\right]=0 \tag{4.16}$$

이 식의 해를 θ_c라 할때 결국 균열의 진전각은 식 (4.17)과 같은 값을 만족해야 함을 확인할 수 있다.

$$K_I\sin\theta_c+K_{II}(3\cos\theta_c-1)=0 \tag{4.17a}$$

$$\theta_c=2\arctan\frac{1}{4}\left(K_I/K_{II}\pm\sqrt{(K_I/K_{II})^2+8}\ \right) \tag{4.17b}$$

여기서, θ_c는 균열 진전각이다. 이때 이 방향에서 $\sigma_{\theta\theta}$의 응력이 주응력이므로 혼합모드 응력확대계수 대신 등가모드 I 의 응력확대계수 K_{Ieq}를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta_c}{2}\left[K_I\cos^2\frac{\theta_c}{2}-\frac{3}{2}K_{II}\sin\theta_c\right]=\frac{K_{Ieq}}{\sqrt{2\pi r}} \tag{4.18}$$

여기서,

$$K_{Ieq}=K_I\cos^3\frac{\theta_c}{2}-3K_{II}\cos^2\frac{\theta_c}{2}\sin\frac{\theta_c}{2} \tag{4.19}$$

이다. 등가모드 I 의 응력확대계수를 이용하면 혼합상태의 문제에 있어서 하나의 변수로 혼합상태의 응력장을 나타낼 수 있고 혼합상태 하중조건하의 균열성장 방향을 간단하게 계산할 수 있다.

4.2.2 파괴역학이론에 근거한 균열진전해석 알고리즘

앞 절에서 제시한 이론들을 적용하여 균열해석을 수행하기 위한 수치해석 알고리즘은 그림 4.4와 같다. 본 알고리즘에서는 해석결과로부터 파괴역학의 계수를 산정하고 이를 바탕으로 균열을 진전시킨 후 균열이 성장함에 따라 국부적 특이거동을 반영하기 위하여 추가의 기저함수확장이 요구되는 절점을 검색하여 이를 적절한 형태의 추가기저함수로 확장하는 과정을 자동화 하였다. 이를 통하여 균열진전해석의 각 단계를 자동화할 수 있었으며, 단위분할법에 의하여 추가적인 계산이 요구되는 부분만의 재계산후 대체함으로써 효율적인 해석이 가능하였다.

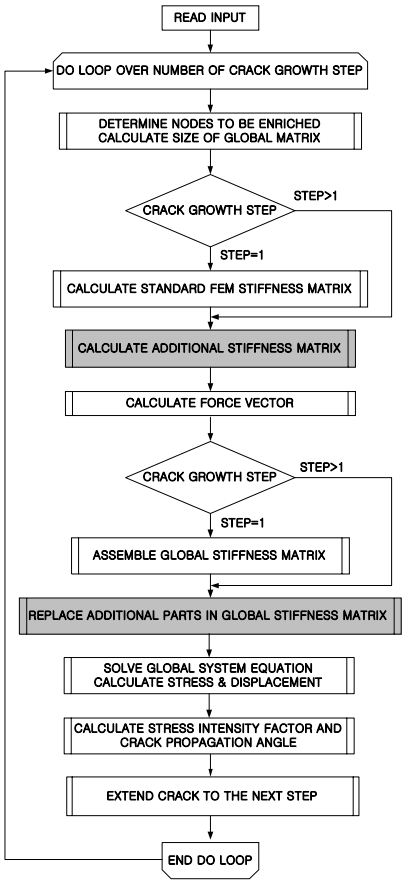


그림 4.4 An analysis algorithm used for growing crack

제5장 확장유한요소법을 이용한 균열진전해석

본 장에서는 확장유한요소법에 균열진전해석을 할 수 있는 알고리즘을 적용하여 공학적으로 의미가 있는 문제에 대한 해석을 수행하였다. 다양한 조건의 강재에 존재하는 균열이 점진적으로 성장하면서 파단에 이르게 되는 과정을 모형화함으로서 개발된 알고리즘의 효율성과 정확성을 검증하였다. 이를 위해 여러가지 모드를 갖는 파괴역학문제에 적용하여 응력확대계수와 균열성장경로에 대한 연구를 수행하였다.

5.1 내적 불연속면이 분포하는 부재의 patch 시험

5.1.1 균열선단의 응력특이성 검토

본 연구에서 제안된 것 같이 일반적인 해석대상체가 아닌 균열과 같은 국부적 특성을 갖고 있는 해석대상체에 대한 수치해석프로그램의 정확성 검증은 일반적인 patch 시험 방법을 그대로 적용할 수 없다. 이는 일반적인 patch 시험 방법을 통하여서는 국부적 특성의 정확한 반영여부를 파악할 수 없기 때문이다. 따라서 본 patch 시험에서는 편측균열을 갖는 평판의 이론해로 알려져 있는 모드 I 에 대한 변위식 식 (5.1)을 이용하였다. Patch 시험 방법은 우선, 이론해에 따라 모드 I 의 파괴형상을 가져올 수 있는 하중이 재하된 경우의 변위값을 이론해를 이용하여 미리 계산하고, 이를 다시 해석모형의 경계에 적용하여 해석을 수행함으로서 얻어진 해석모형 내부의 응력값과 이론해에 따른 식 (5.2)를 통하여 계산된 σ_{yy}응력값을 비교하는 방식으로 수행되었다.

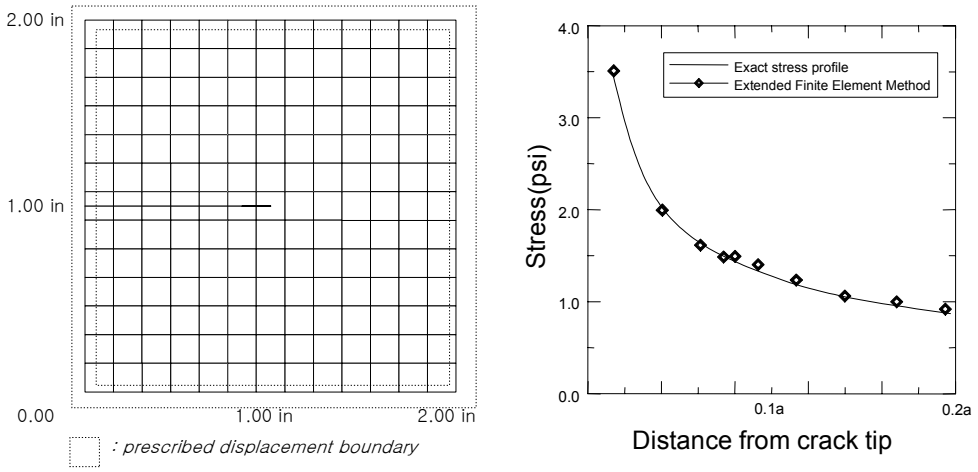
$$u_x = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\varkappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{5.1a}$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[\varkappa - 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{5.1b}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \tag{5.2}$$

이는 본 연구에서 제안한 균열이 고려된 확장근사변위함수가 정확하다면 이를 적용하여 수행된 해석대상체 내의 응력분포가 이론해를 통하여 계산된 응력분포와 동일할 것이므로 이 두 값의 비교를 통하여 그 정확성을 검증할 수 있기 때문이다.

본 수치예제에서 균열길이는 a이고, 균열선단은 좌표 (1.0a,1.0a)에 위치하며, 해석모형의 가로, 세로의 길이는 각각 2a이다. 응력확대계수는 1로 미리 규정하였다. 해석결과 그림 5.1과 같이 균열선단의 특이성을 요소망 제약조건 없이 요소내에서도 잘 묘사해 주고있음을 확인할 수 있다.



(a) (b)

그림 5.1 (a) Plate with a edge crack (b) Crack tip stress (σ_{yy}) profile($\theta = 0$, $r > 0$)

5.1.2 균열회전각에 따른 응력확대계수 검토

본 연구의 경우에는 균열진전해석까지를 연구범위로 하고 있다. 따라서 균열의 진전양상을 결정하는 주요한 파괴역학인자중 하나인 응력확대계수에 대한 검토를 수행하는 것이 필요하다. 이를 위하여 그림 5.2와 같이 중앙에 균열이 분포하는 부재에 대하여 양 끝단에 $1\ psi(7.0\times10^{-2}kgf/cm^2)$의 등분포하중을 작용시키고 균열을 초기상태에서 점차 회전시켜가며 각 상태에서의 모드Ⅰ및 모드Ⅱ 응력확대계수를 산정하였다.

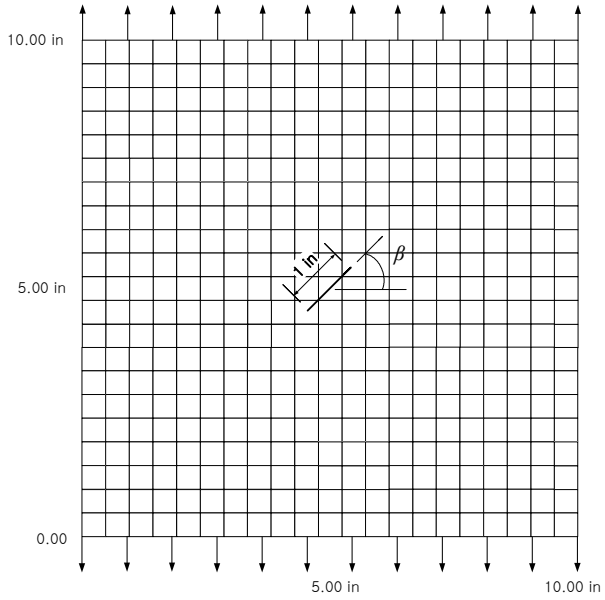


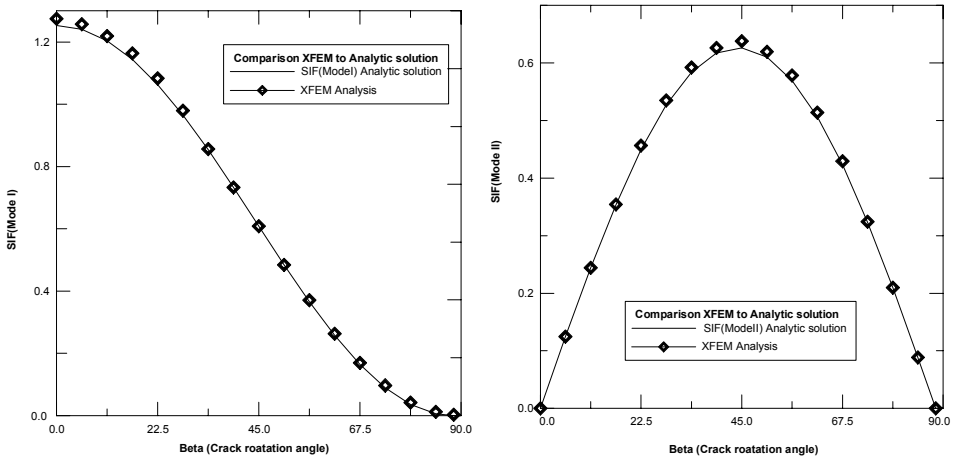
그림 5.2 Plate with a center crack at angle β

이를 위하여 본 시험에서는 가로와 세로의 길이가 모두 10 in인 부재를 441개의 요소(21×21)로 구성된 요소망을 사용하여 해석을 수행하였으며 균열의 길이는 1 in로 하였다. 또한, 부재의 크기가 균열의 크기와 비교하였을 때 충분히 크므로 무한판에 대한 이론해와 비교하였다. 이 경우 모드Ⅰ및 모드Ⅱ의 응력확대계수는 식 (5.3)과 같이 균열회전각 β의 함수로 표현된다.

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi a}\ \cos^{2}(\beta) \tag{5.3a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sigma\sqrt{\pi a}\sin(\beta)\cos(\beta) \tag{5.3b}$$

그림 5.3은 균열의 회전각 β에 대하여 계산된 각각의 모드에 대한 응력확대계수를 식 (5.3)의 이론해와 비교하여 도시한 것이다. 이 결과에서 확인할 수 있듯이 균열의 회전각이 0。에서 90。까지 변화함에 따라 본 연구에서 제안된 방법으로 계산된 응력확대계수값이 이론해와 잘 일치함을 확인할 수 있었다.



(a) (b)

그림 5.3 (a) K_{I} vs. β for a plate with an angled center crack (b) K_{II} vs. β for a plate with an angled center crack(unit: $psi\sqrt{in}$)

5.1.3 원홀 주변의 응력특이성 검토

본 연구에서는 해석대상체에 분포하는 원홀 역시 요소망의 구성에 의존하지 않고 추가의 형상함수를 사용하여 이를 해석에 반영할 수 있는 기법을 도입하였다. 따라서 본 연구를 통하여 제안된 방법이 원홀 주변의 응력집중현상을 효율적으로 반영할 수 있는지를 검토하기 위한 patch 시험을 수행하였다.

Patch 시험을 위한 해석 모형은 그림 5.4와 같이 x방향으로 $1.0\ psi$의 인장력이 작용하는 지름이 $2.0\ in$인 원홀을 가진 평판문제를 대상으로 본 연구에서 제시한 방법론을 적용하여 해석하였다. 해석 대상인 평판의 크기는 $20\times20\ in$이고 해석을 위하여 1600(40×40)개의 요소로 구성된 요소망을 사용하여 평면변형률(plain strain)조건으로 해석을 수행하였다.

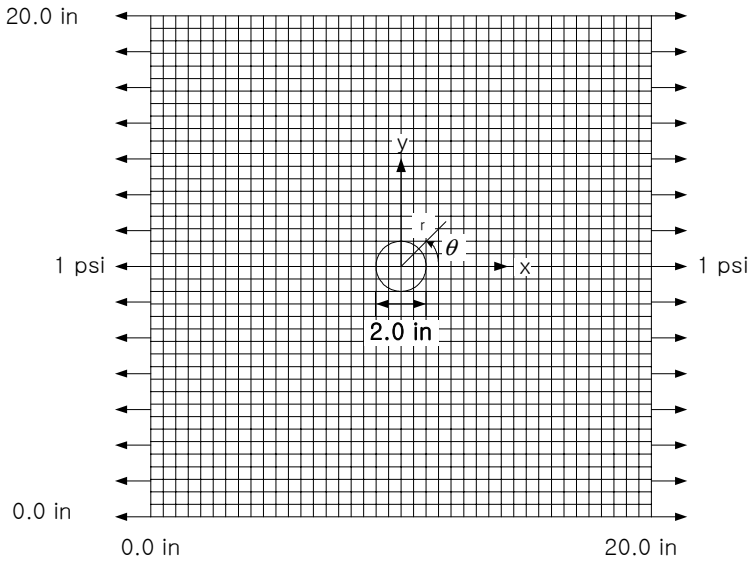


그림 5.4 Plate with a center hole

해석결과는 기존의 연구를 통하여 제시된 식 5.4와 같은 이론해(Timosenko와 Goodier, 1970)에 의하여 와 비교함으로써 그 정확성을 검증하였다.

$$\sigma_{xx} = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta \tag{5.4a}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta \tag{5.4b}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta \tag{5.4c}$$

여기서 r, θ는 그림 5.4에서와 같이 원홀의 중심을 원점으로 한 극좌표계를 나타내며 a는 원홀의 지름을 의미한다.

그림 5.5는 본 연구에서 제안한 방법과 이론해의 σ_{xx}값을 $x=0$, $\theta=90^\circ$ 가되는 점 즉, y축의 양의 방향을 따라 비교한 결과를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 제안된 방법론은 균일한 요소망(regular mesh)를 사용하여도 원홀에서의 응력집중현상을 잘 표현하고 있음을 확인할 수 있다.

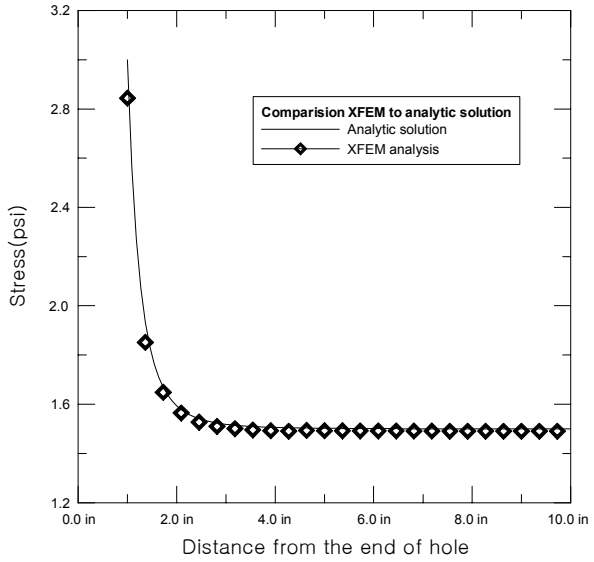


그림 5.5 Stress (σ_{xx}) profile around hole ($\theta=90^\circ$)

5.2 기본적인 파괴역학 문제의 균열진전해석

5.2.1 인장하중을 받는 편측균열

그림 5.6과 같이 한쪽에 편측균열이 존재하는 부재의 경우 아래면이 수직방향 변위에 대해 고정되어 있고 $1\ psi(7.0\times10^{-2}kgf/cm^2)$크기의 인장하중을 받는 문제를 해석하였다. 재료상수는 탄성계수가 $3\times10^6\ psi(42.6\times10^6kg/cm^2)$이고 포아송비가 0.3이다. 해석을 위하여 312개의 절점으로 이루어진 275(11×25)개의 요소를 사용하였으며, 확장된 기저함수가 사용된 요소에 한해서는 8×8의 가우스적분점을 사용하였고 이 외에는 4×4 적분점을 사용하였다. 그림 5.7은 균열이 성장함에 따라 본 연구를 통하여 해석된 모드 I 응력확대계수값을 이론해와 비교하여 도시한 것이다.

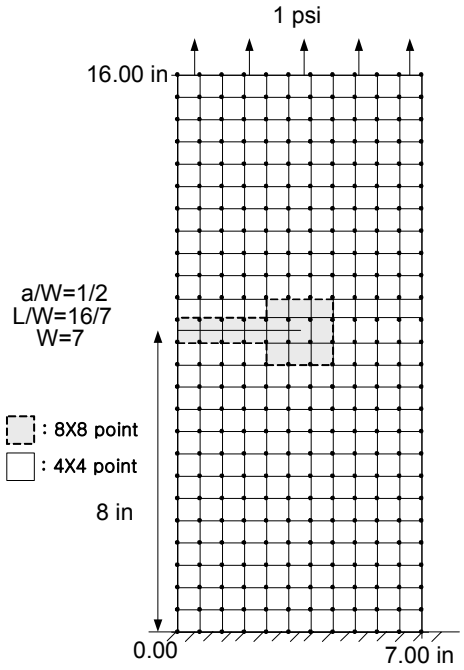


그림 5.6 Edge crack in tension problem

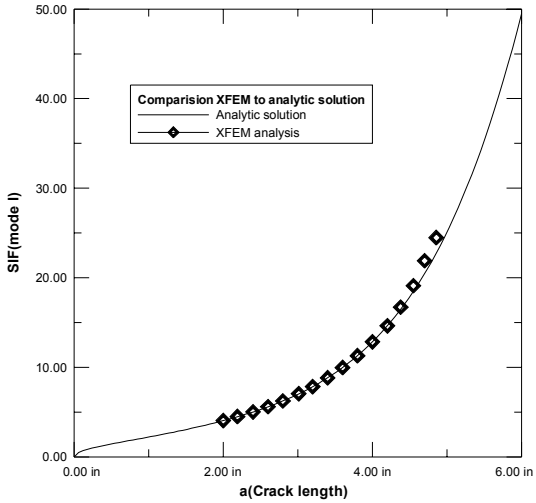
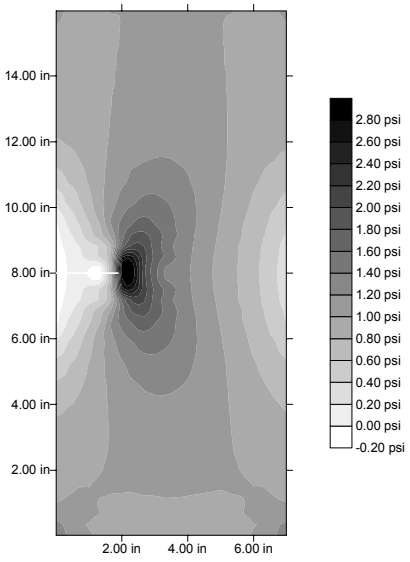
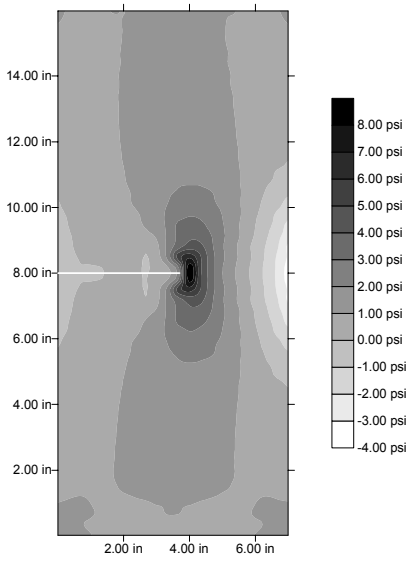


그림 5.7 Stress intensity factor(K_I) as crack growth(unit: $psi\sqrt{in}$)

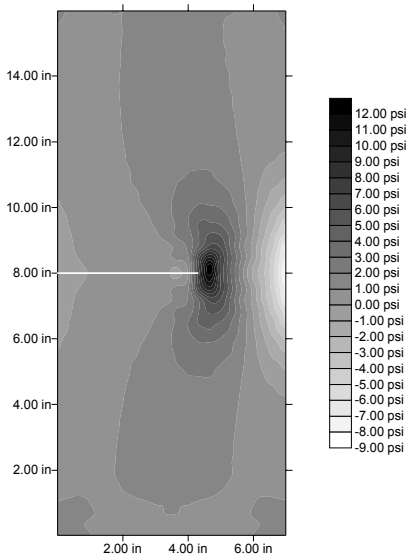
이와 같은 균열진전 단계에 있어서 그림 5.8은 해석 결과를 바탕으로 수직방향의 응력상태를 도시한 것이다. 균열이 성장함에 따라 균열선단에서 점점 더 응력이 집중되어 감을 확인할 수 있다.



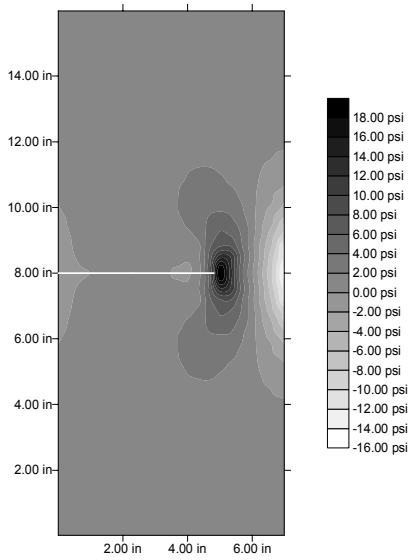
(a) Initial step



(b) After 6 steps



(c) After 11 steps

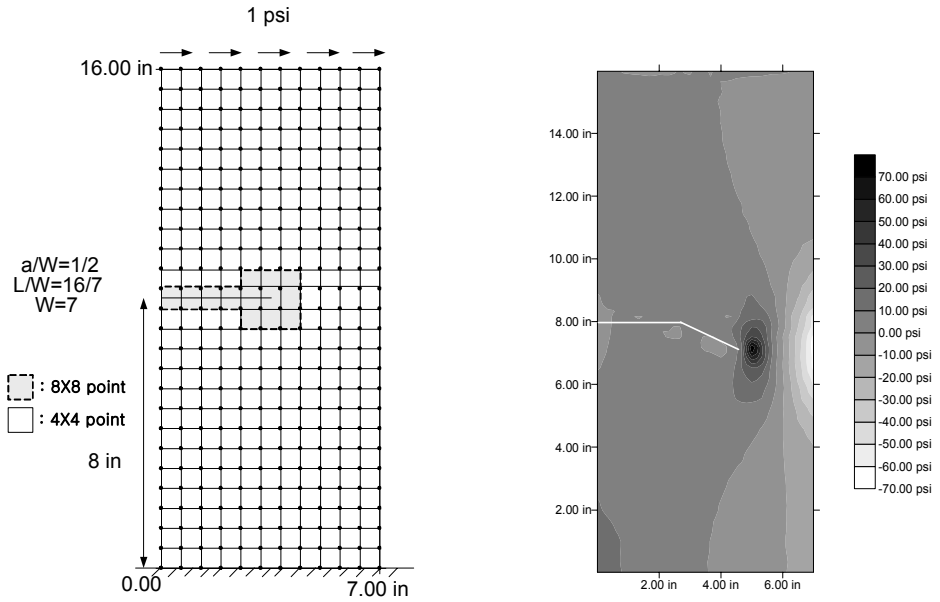


(d) After 15 steps

그림 5.8 Stress (σ_{yy}) distribution with growing crack(unit: psi)

5.2.2 전단하중을 받는 편측균열

본 절에서는 모드Ⅰ과 모드Ⅱ 상태가 동시에 발생하는 혼합모드상태의 균열문제를 대상으로 하였는데 그림 5.9(a)와 같이 하단을 고정시키고 상단에는 전단응력 $1\ psi\,(7.0\times10^{-2}kgf/cm^2)$을 작용시켰다. 정지상태에 대한 균열해석을 한 후 균열을 진전시키는 해석을 수행하여 균열의 경로를 추정하였다. 그림 5.9(b)는 해석 종료단계에서의 응력분포도를 나타내고 있는데 균열이 혼합모드를 유발하는 전단하중에 의해서 꺾이면서 성장하여 균열선단에서의 응력집중현상이 발생함과 동시에 최종단계에서 균열의 앞쪽에 매우 큰 압축응력을 유발하고 있음을 명확히 확인할 수 있다. 재료상수와 부재의 치수는 앞의 예제와 같다.



(a) (b)

그림 5.9 (a) Edge crack in shear problem (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi)

초기 상태에서의 이 문제에 대한 이론해(Wilson, 1969)는 파괴모드에 따라 $K_I = 34.0\, psi\sqrt{in}$, $K_{II} = 4.55\, psi\sqrt{in}$로서 이를 해석결과와 비교하면 표 5.1과 같이 혼합모드에 대해서도 비교적 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

표 5.1 Error of stress intensity factor for mixed mode(unit: $psi\sqrt{in}$)

	analytic solution	XFEM	error(%)
K_I	34.00	32.40	4.70
K_{II}	4.55	4.51	0.87

그림 5.10은 여러 단계의 균열진전해석을 수행한 경우에 대한 균열의 성장경로와 균열이 성장하면서 경로를 따라 요소들의 기저함수가 확장된 형태를 나타낸 것이다. 균열성장과정을 해석하게 되면 매 단계마다 새롭게 생성되는 균열이 점차

진전해 나감에 따라 증가하는 균열면에 대하여 이를 compact support내에 포함하는 절점은 자동적으로 불연속성을 나타낼 수 있는 함수로 확장하게 된다.

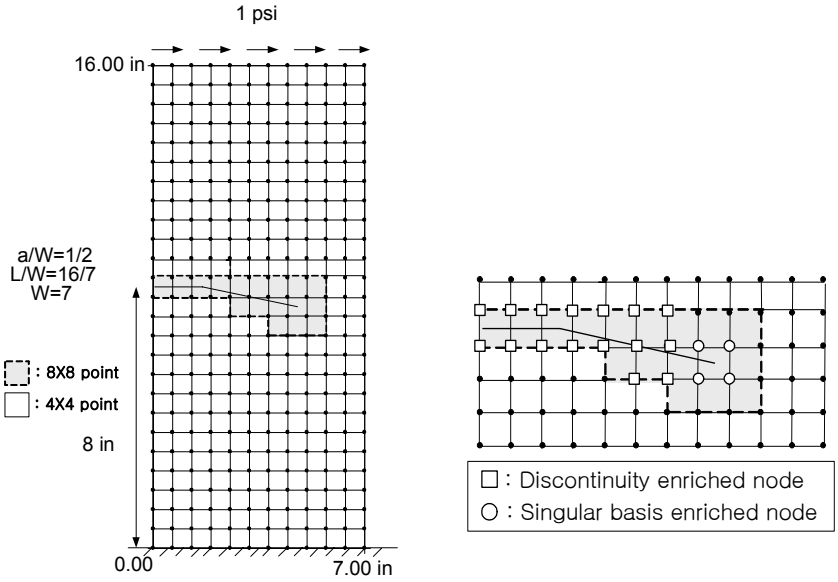
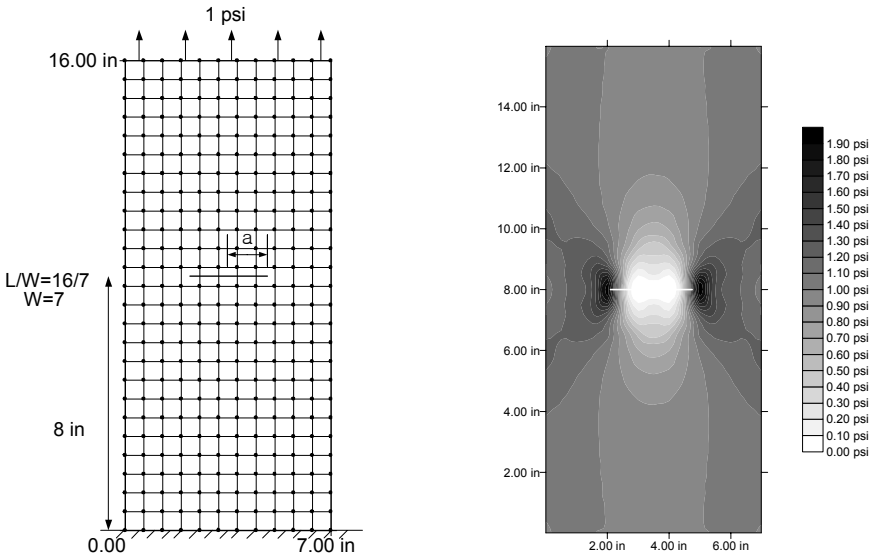


그림 5.10 Edge crack growth in shear problem and schematic of enriched nodes with growing crack

5.2.3 인장하중을 받는 중앙균열

본 예제는 2개의 균열선단으로 이루어진 중앙균열이 그림 5.11(a)와 같이 $1\ psi$ $(7.0\times10^{-2}kgf/cm^2)$인장력을 받는 경우를 가정하여 성장해 나가는 과정을 해석한 것으로서 해석대상체의 물성치는 앞의 예제들과 동일하다. 그림 5.11(b)는 초기상태의 해석결과를 도시한 것으로써 좌우대칭성 및 균열선단들에서의 응력집중현상 등과 같은 일반적인 예상결과가 잘 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 그림 5.12는 균열의 길이를 증가시키면서 계산한 응력확대계수값을 이론해(Rooke와 Cartwright, 1974)와 비교하여 도시한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 어느 정도의 오차는 있지만 비교적 높은 정도를 가지고 해석이 균열진전해석이 수행됨을 확인할 수 있다.



(a) (b)

그림 5.11 (a) Central crack in tension problem (b) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step(unit: psi)

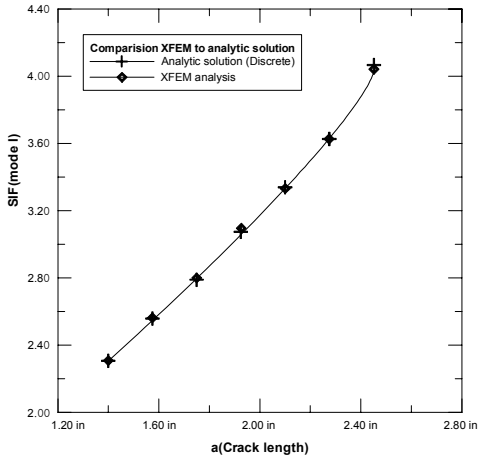


그림 5.12 Stress intensity factor(K_I) for plate with central crack(unit: $psi\sqrt{in}$)

5.3 홀이 있는 접합부의 균열진전해석

본 절에서는 강교량의 시공시 부재간의 연결을 위하여 흔히 사용되는 볼트연결 혹은 리벳 연결부에서 존재하게 되는 원홀이 있는 부재에 균열이 분포하고 있을 경우를 가정하여 해석을 수행하였다. 이를 위하여 부재의 중앙에 있는 원홀에서 발생한 두개의 균열을 갖는 경우 및 떨어져서 존재하는 두 개의 원홀 사이에 균열이 분포하고 있을 경우를 가정하여 균열진전해석을 수행하였다.

5.3.1 원홀 주변에서 발생한 두개의 균열

그림 5.13은 교량의 연결부에서 흔히 사용되는 리벳 혹은 볼트의 연결부중 일부를 모형화 한 것으로서 부재의 중앙에 원홀이 있으며 이 원홀에서 두개의 균열이 발생한 상황을 해석모형화 한 것이다.

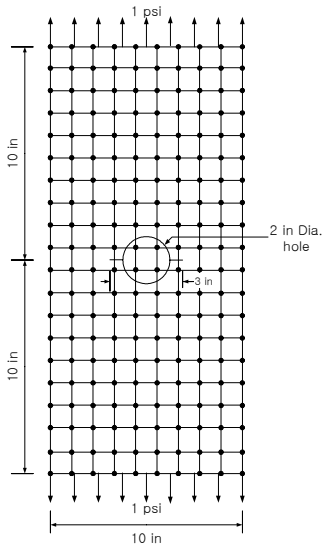


그림 5.13 One hole and two cracks in tension problem

해석을 위하여 부재의 양 끝단에 크기가 $1\ psi\,(7.0\times10^{-2}kgf/cm^2)$인 인장력을 작용시키고 171 (9×19)개의 요소로 이루어진 균일한 요소망(regular mesh)을 사용하였으며, 부재에 분포하는 원홀 및 균열의 인식은 본 연구에서 제안된 방법을 통하여 해석과정에서 요소망 제약조건 없이 반영되었다.

이 경우 균열은 모드 I 하중에 의하여 점차 성장하게 되며 이때의 응력확대계수는 그림 5.14와 같다. 이때 비교를 위하여 사용된 응력확대계수의 이론값(Rooke와 Cartwright, 1974)을 균열성장해석의 전체구간 중 7개의 값에 대하여 이산화하여 비교 도시하였다.

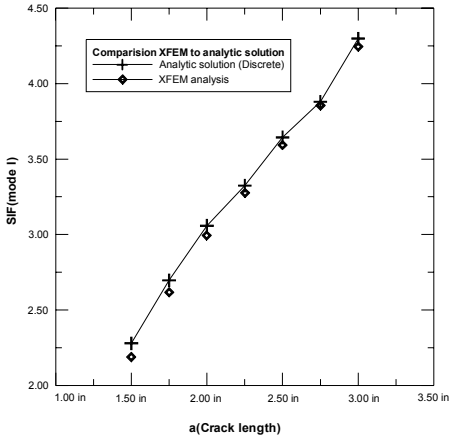
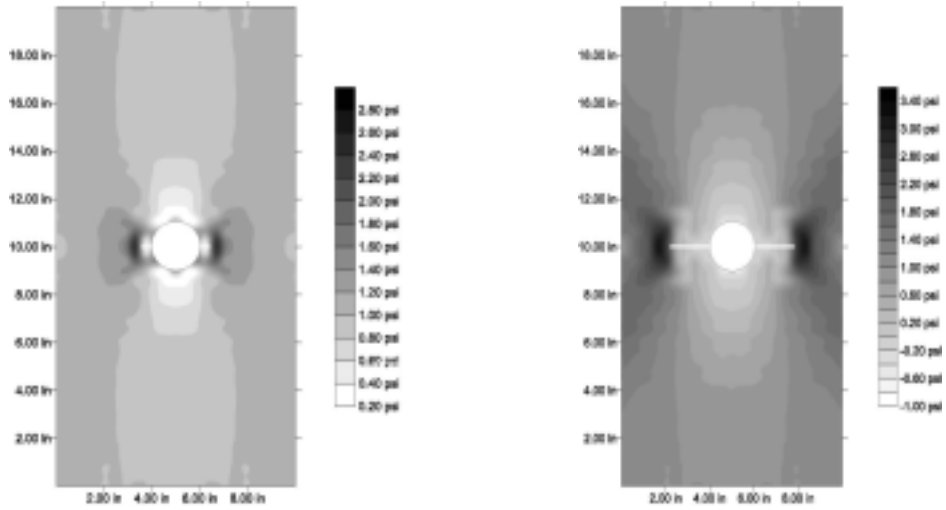


그림 5.14 Stress intensity factor(K_I) for plate with one hole and two cracks(unit: $psi\sqrt{in}$)

이론값과 본 연구를 통하여 얻어진 응력확대계수를 비교한 결과 이 두 값이 전체적으로 비교적 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 단 초기 상태의 경우에는 원홀로 인한 영향과 균열로 인한 영향의 상호간섭으로 인하여 약간의 오차가 발생하지만 균열이점차 성장해 나감에 따라 해석 정확도가 향상됨을 알 수 있다. 또한 그림 5.15는 균열길이(2a)가 $3\ in$인 초기상태와 인장력에 의하여 균열이 성장한 최종단계의 해석결과를 도시한 것으로서 원홀과 균열선단으로 인한 응력집중 부위를 확인할 수 있다.

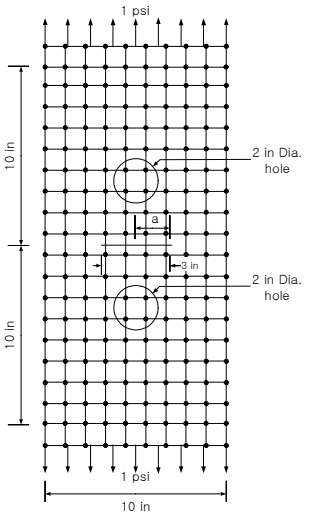


(a) (b)

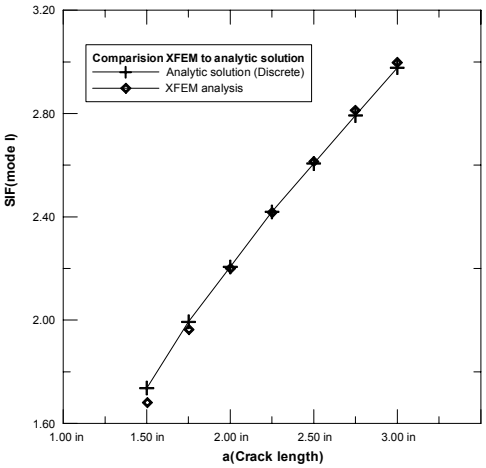
그림 5.15 (a) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi)

5.3.2 두개의 원홀 사이에 발생한 중앙균열

본 절에서는 두 개의 원홀이 있는 연결부 중앙에 분포하는 균열이 모드Ⅰ 하중에 의하여 성장하는 그림 5.16(a)와 같은 문제를 해석하였다. 이때 사용된 요소망의 구성은 앞의 예제에서 사용되었던 요소망과 동일하다. 균열은 초기상태에서 모드Ⅰ 하중에 의하여 점차 성장하게 되며 각 단계에서 계산된 응력확대계수값은 그림 5.16(b)와 같이 이론해(Rooke와 Cartwright, 1974)와 비교하여 도시하였다. 각각의 균열진전 단계에서 계산된 응력확대계수가 이론해와 잘 부합되고 있음을 확인할 수 있다. 또한 그림 5.17은 해석단계중 초기 단계와 최종단계의 해석결과를 도시한 것으로서 부재에 분포하는 원홀과 균열로 인하여 원홀 주변과 균열선단에서 응력집중 현상이 발생하는 부위를 확인할 수 있었으며, 균열의 길이가 점차 증가해 감에 따라 원홀에 의한 응력집중현상 보다는 균열선단에서의 응력집중현상으로 인한 응력값이 더욱 커짐을 확인할 수 있다.

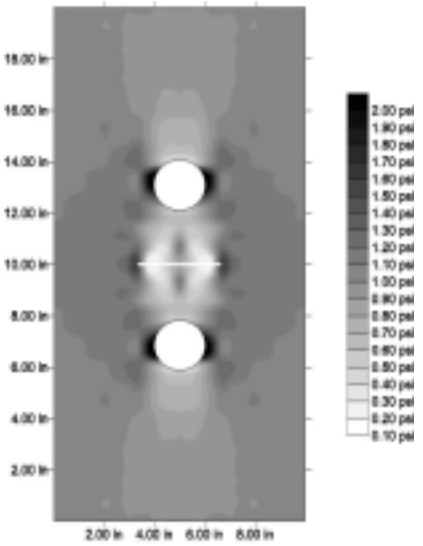


(a)

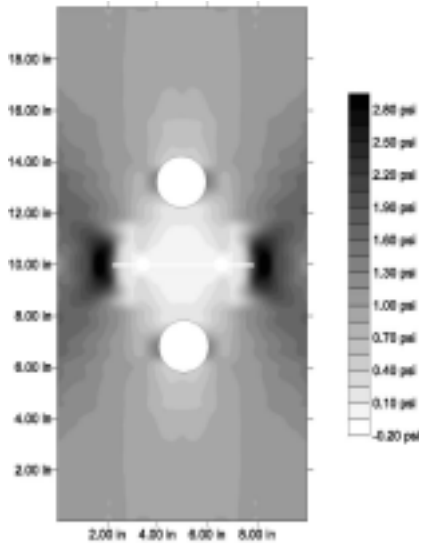


(b)

그림 5.16 (a) two holes and center crack in tension problem (b) Stress intensity factor(K_I) for plate with two holes and center crack(unit: $psi\sqrt{in}$)



(a)



(b)

그림 5.17 (a) Stress(σ_{yy}) distribution at initial step (b) Stress(σ_{yy}) distribution at final step(unit: psi)(unit: psi)

5.4 원홀이 있는 3-point bending 부재의 균열진전해석

본 절에서 제시할 예제는 양 끝단이 고정된 부재의 중앙에 집중하중이 재하된 휨부재(3 point-bending beam)를 대상으로 초기균열의 위치 및 크기에 따라 균열의 성장경로에서 발생하는 변화를 해석한 결과이다. 이 부재는 그림 5.18과 같이 초기균열이 휨부재의 하단부, 즉 휨으로 인하여 부재에 인장력이 작용하는 부분에 분포하고 있으며 균열의 성장을 저지하기 위하여 부재의 중앙에는 4 in의 수평이격(offset)을 갖고 3개의 스톱홀(stop hole)이 수직으로 분포하고 있다.

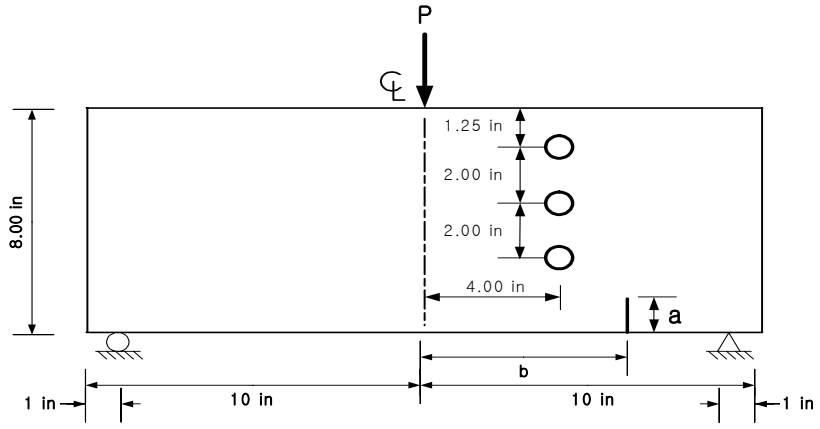
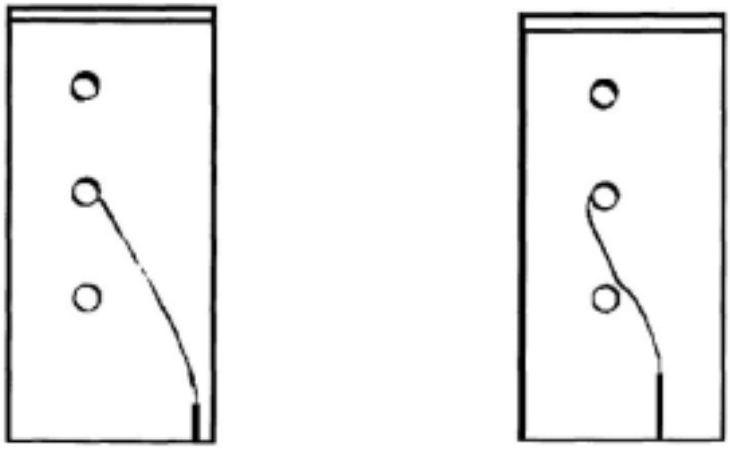


그림 5.18 3 point bending beam with three holes and edge crack

이 부재에 대한 해석은 기존의 연구를 통하여 실험결과가 제시되었던 연구(Bittencourt 등, 1996)로서 초기 균열의 위치 및 크기에 따라 균열이 성장하여 부재의 원홀에서 성장을 멈추거나 혹은 원홀 사이를 통과하게 된다는 사실이 제시되었다. 따라서, 본 연구에서는 확장유한요소법을 이용하여 본 예제에 대한 해석을 수행한 후 이를 기존의 결과와 비교하였다. 그림 5.19는 기존의 연구를 통하여 발표된 실험결과로서 표 5.2와 같이 초기균열의 위치에 따라 균열이 어떤 경로로 진전하다 성장을 멈출지 여부가 결정되는 형상을 보여주고 있다.



(a) case 1 (b) case 2

그림 5.19 Digitized photographs of observed crack trajectories

표 5.2 Initial geometry of two crack cases

	Initial crack length(a)	Vertical offset from center line(b)
Case 1	1.00 in	6.00 in
Case 2	1.50 in	5.00 in

본 해석에서는 이를 위하여 전체 총 286개의 요소(26×11)를 사용하여 균일한 요소망을 생성한 후 균열 및 원홀의 국부적 특성표현을 본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 요소망 제약조건 없이 해석과정에 반영하였다.

표 5.2의 첫번째 초기균열(case 1)과 같은 형상으로 존재하는 균열은 하중이 재하됨에 따라 균열이 점차 성장하여 결국에는 3개의 수직으로 분포하고 있는 원홀 중앙에 위치한 원홀과 교차되며 성장을 멈추게 된다. 그림 5.20은 초기상태의 균열에 대한 해석결과를 도시한 것이며 이때의 균열성장 경로는 그림 5.21과 같다.

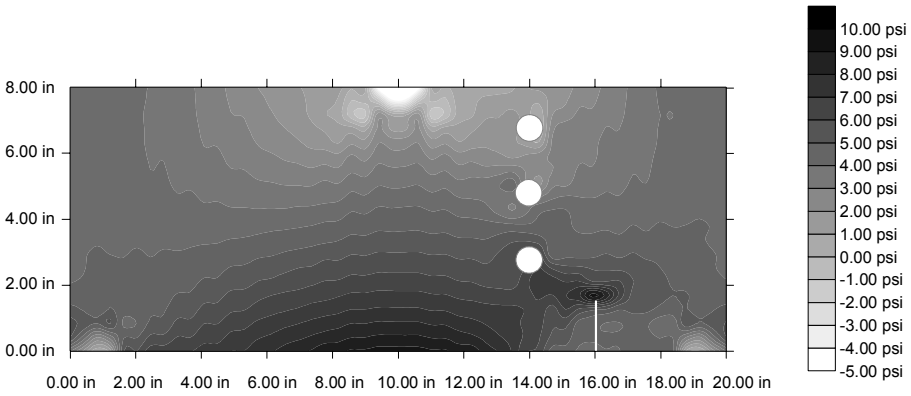
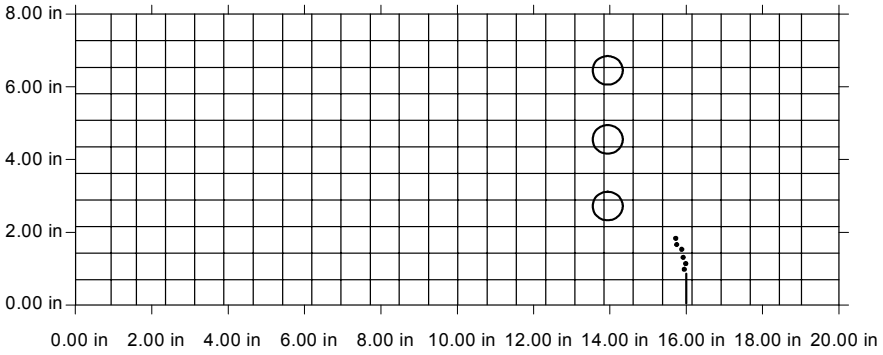
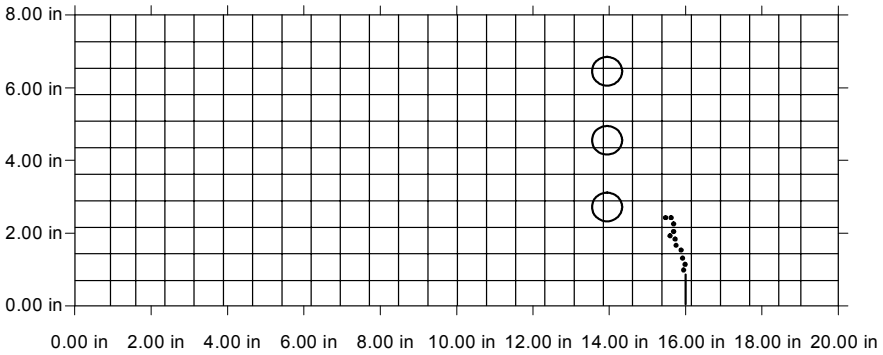


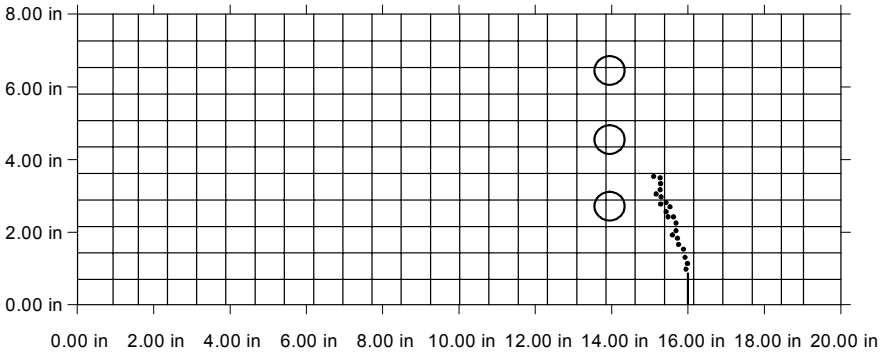
그림 5.20 Stress(σ_{yy}) distribution at initial step(unit: psi)



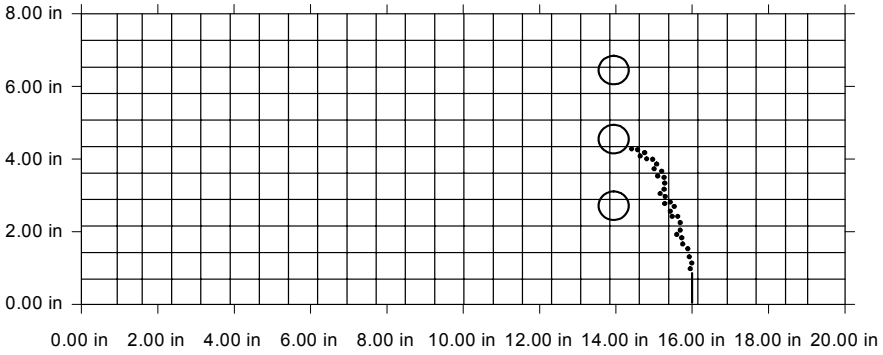
(a) After 5 steps



(b) After 10 steps



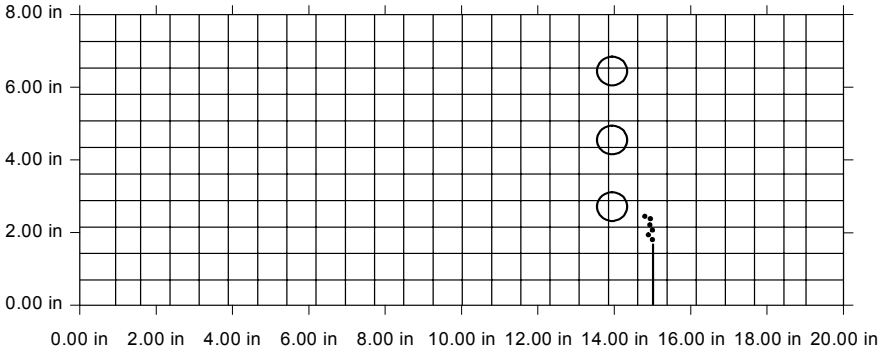
(c) After 15 steps



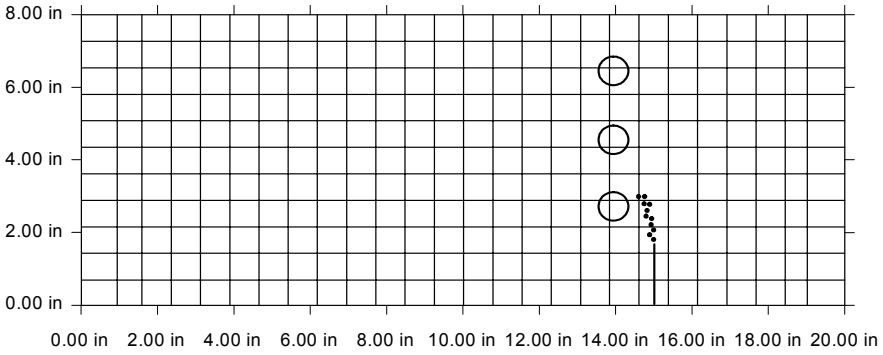
(d) At final step

그림 5.21 Crack growing paths of 3 point bending beam with three holes and edge crack(case 1)

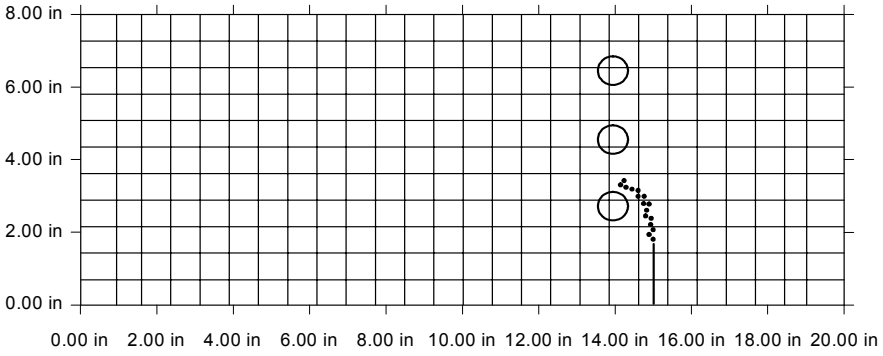
다음의 그림 5.22는 표 5.2에서 두번째 경우에 해당하는 초기균열상태(case 2)를 가정하였을 경우 해석결과로 얻어지는 균열의 성장경로이다. 기존에 수행되었던 실험에서는 균열이 중앙의 원홀쪽으로 휘어지며 결국에는 성장을 멈추게 되는 현상이 나타났으나, 이를 실제적인 수치해석방법으로 접근한 연구들(Bittencourt 등, 1996; Fleming 등, 1997)에서는 이러한 균열의 휘어짐 현상을 표현해 내지 못하였으며 본 연구를 통하여 제안된 방법 역시 기존의 수치해석방법을 사용하였던 연구결과와 동일한 균열진전 결과를 얻었다. 본 연구를 통하여 해석된 균열성장 경로는 두 개의 원홀 사이를 통과하는 경로이다.



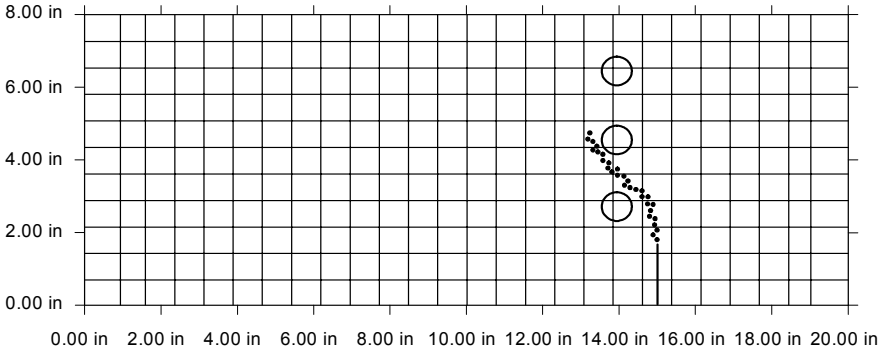
(a) After 5 steps



(b) After 10 steps



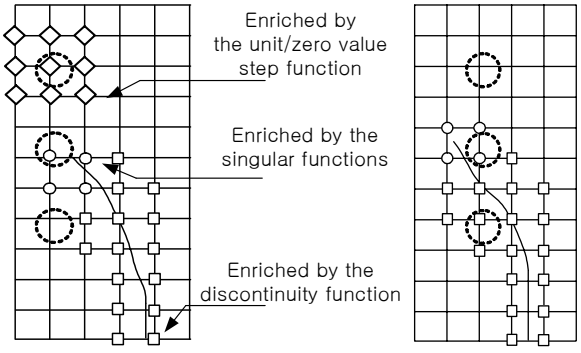
(c) After 15 steps



(a) At final step

그림 5.22 Crack growing paths of 3 point bending beam with three holes and edge crack(case 2)

그림 5.23은 앞에서 제시한 두 가지 초기균열의 경우(case 1과 case 2) 최종적인 균열성장단계를 대상으로 균열로 인한 국부적 특성묘사를 위하여 확장된 절점을 표현한 것이다. 여기서 사각형으로 표시된 절점은 불연속 함수에 의하여 확장된 절점이며, 작은 원으로 표현된 절점은 4개의 특이기저 함수를 이용하여 균열선단의 응력특이성을 반영할 수 있도록 확장된 절점을 뜻한다. 이와 같은 확장이 요구되는 절점의 선택 및 기저함수의 확장은 본 연구에서 제안된 균열진전해석 프로그램 내에서 자동적으로 수행이 됨으로써 균열진전해석의 단계를 자동화할 수 있었다.



(a) case 1 (b) case 2

그림 5.23 The enrichment strategy to represent local characteristic behavior

제6장 결론

본 연구에서는 균열이 점차 성장해 나가는 과정을 중심으로 강부재의 파괴진행과정 및 이에 따른 구조역학적 거동변화를 효율적으로 해석하기 위하여 확장유한요소법을 적용한 요소망 제약조건이 없는 균열진전해석 알고리즘을 개발하였다. 본 연구를 통하여 도출된 결론은 다음과 같다.

1. 본 연구에서는 요소망 제약조건이 없는 확장유한요소법을 이용함으로서 균열의 성장과정을 효율적으로 모형화하여 해석할 수 있는 균열전파해석 알고리즘을 제안하고 이를 반영한 수치해석프로그램을 개발하였다.

2. 확장유한요소법을 이용함으로서 균열진전에 따라 추가적인 요소망 재구성 등의 과정 없이 균열선단주변의 응력집중효과와 이를 바탕으로한 파괴역학계수의 정확한 산정이 가능하였다.

3. 개발된 알고리즘과 수치해석프로그램은 일반적인 파괴역학문제에 대한 균열진전해석을 통하여 기존의 이론적 결과와 잘 일치함을 확인함으로서 그 정확성을 검증할 수 있었다.

4. 본 연구를 통하여 개발된 알고리즘은 균열해석시 단계적인 해석과정을 자동화하여 해석의 효율성을 높이는 동시에 균열이 성장함에 따라 부재의 파괴가 진행되는 과정을 해석적 방법으로 파악할 수 있었다.

참고문헌

1. Babuška, I. and Melenk, J. M. (1997), "The Partition of Unity Methods", *International Journal of Numerical Methods in Engineering,* Vol. 40, pp. 727-758.

2. Babuška, I. and Rosenzweig, K. (1972), "A Finite Element Scheme for Domains with Corners", *Numerische Mathematik*, Vol. 20, pp. 1-21.

3. Belytschko, T. and Black, T. (1999), "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing", *International Journal of Numerical Mechanics in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620.

4. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. (1994), "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, pp. 229-256.

5. Bittencourt, T. N., Wawrzynek, P. A. and Ingraffea, A. R. (1996), "Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, pp. 321-334.

6. Broek, D. and Rice. R. C. (1976), *Fatigue Crack Growth Properties of Rail Steels*, Battelle Report to DOT/TC.

7. Crooker, T. W. and Krause, D. J. (1972), *The Influence of Stress Ratio and Stress Level on Fatigue Crack Growth Rate in 140ksi YS Steel*, Report of NRL Progress, Naval Research Laboratory, Washinton, D.C..

8. Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N. and Belytschko, T. (2000), "Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1741-1760.

9. Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T. (2000), "Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, pp. 235-160.

10. Edogen, F. and Shi, G. C. (1963), "On the Crack Extension in Plate under Loading and Transverse Shear", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 519-527.

11. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T. (1997), "Enriched Element Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504.

12. Grisvard, P. (1985), *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Boston, Pitman Publishing, Inc.

13. Harlow, F. H. (1964), "The Particle-In-Cell Computing Method for Fluid Dynamics", *Methods for Computational Physics*, Vol. 3, pp. 319-343.

14. Iida, S. and Kobayashi (1969), "Crack Propagation Rate in 7075-T6 Plate under Cyclic Tensile and Transverse Shear Loading", *Journal of Basic Engineering*, pp. 764-769.

15. Koh, H. M., Lee, H. S. and Jeong, U. Y. (1995), "An Incremental Formulation of the Moving-grid Finite Element Method of the Prediction of Dynamic Crack Propagation", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 158, pp. 295-309.

16. Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. (1995), "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* Vol. 20, pp. 1081-1106.

17. Lucy, L. B. (1977), "A Numerical Approach to Testing of the Fission Hypothesis", *The Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024.

18. Melenk, J. M. and Babuška, I. (1996), "The Partition of Unity Finite Element Methods : Basic Theory and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 139, pp. 289-314.

19. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999), "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150.

20. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. (1992), "Generalized the Finite Element Method : Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307-318.

21. Nuismer, R. J. (1975), "An Energy Release Rate Criterion for Mixed Mode Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 245-250.

22. Paris, P. C. and Erdogan. F. (1963), "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 528-534.

23. Roberts, R. and Kibler, J. J. (1971), "Mode Ⅱ Fatigue Crack Propagation", *Journal of Basic Engineering*, pp. 671-680.

24. Rooke, D. P. and Cartwright, D. J. (1974), *Stress Intensity Factors*, Royal Aircraft Establishment, University of Southampton.

25. Saleh, A. L. and Aliabadi, M. H. (1998), "Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete using BEM", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, pp. 949-958.

26. Shih, C. F. and Asaro, R. J. (1988), "Elastic-plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces : Part I - Small Scale Yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 299-316.

27. Sih, G. C. (1974), "Strain Energy Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, pp. 305-321.

28. Sukumar, Chopp, D. L., Moës, N. and Belytschko, T. (2000a), "Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the eXtended Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6183-6200.

29. Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. and Belytschko, T. (2000b), "Extended Finite Element Method for Three-dimensional Crack Modelling," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1549-1570.

30. Sumi, Y. (1985), "Computational Crack Path Prediction", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 4, pp. 149-156.

31. Wilson, W. K. (1969), *Combined-Mode Fracture Mechanics*, Ph. D. thesis, University of Pittsburgh.

32. Timoshenko, S. P. and Goodier, I. N. (1970), *Theory of Elasticity*, 3rd. edition, McGraw-Hill, pp. 42-96.

33. Yau, J. F., Wang, S. S., and Corten, H. T. (1980), "A Mixed-mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341.

ABSTRACT

Crack propagation analysis of steel member by using the extended finite element method

Song Jeong-Hoon

Dept. of Civil Engineering

The Graduate School

Yonsei University

Structural components are subjected to repeated fluctuating loads whose magnitude is well below the fracture toughness. By this loading, cracks are initiated at certain parts of welding, rivet connection, or bolting connection where stresses are concentrated. As the crack grows, the stiffness of structural component gradually decreases and finally the component fails. Since slowly growing crack propagates to arbitrary direction according to the geometry, boundary condition, and loading condition, it is not easy to predict its growing path of component by using analytic or conventional numerical methods.

In this study, recently developed Extended Finite Element Method, which is free from mesh-dependency, and some numerical techniques for crack analysis are used to solve crack propagation problem. The growing path of cracks are studied by using this strategy for crack propagation analysis.

In addition the failure mechanism of steel components by growing cracks are discussed. As a result, predicted crack path by Extended Finite Element Method that agree well with empirical data is obtained.

Key words : Extended Finite Element Method, mesh-dependency, growth of crack, crack trajectory