大 韓 土 木 學 會 論 文 集
第23卷 第6A號 · 2003年 11月
pp. 1077 ~ 1086

확장유한요소법을 이용한 요소망제약조건이 없는 균열진전해석

Crack Propagation Analysis without Mesh-Dependency by Using Extended Finite Element Method

이상호* · 송정훈** · 김명원***
Lee, Sang-Ho · Song, Jeong-Hoon · Kim, Myoung-Won

Abstract

In this paper, a new algorithm for crack propagation analysis by using extended finite element method is proposed, and a program which can perform consecutive crack propagation analysis without mesh-dependency is developed. In this method, the singularity and the discontinuity of the crack are efficiently modeled by using initial mesh and modified approximation for displacement fields without refining mesh near crack tip. It enables the asymptotic stress field near crack tip and crack surface to successfully express. The crack propagation procedure is modeled by using linear elastic fracture mechanics theory. The developed method is verified by evaluating crack tip stress profile and stress intensity factors of mode I, mode II and mixed-mode fracture problems and the results show the effectiveness and robustness for fracture problems.

Keywords : *extended finite element method, crack propagation analysis, linear elastic fracture mechanics, crack growth*

요 지

본 논문에서는 요소망 구성상의 제약조건 없이 균열진전해석이 가능한 새로운 수치해석기법인 확장유한요소법을 이용하여 임의의 균열성장과정을 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 바탕으로 균열의 성장방향과 경로를 추정하여 균열진전해석을 수행할 수 있는 수치해석프로그램을 개발하였다. 균열해석에 있어서는 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수를 균열로 인한 응력 및 변위의 불연속성과 균열선단에서 발생하는 응력특이성을 수치적으로 모형화할 수 있는 추가의 기저함수를 사용하여 확장함으로써 별도의 요소망 재구성없이 이를 요소내에서도 효율적으로 묘사할 수 있도록 하였으며, 선형탄성파괴역학이론에 근거하여 파괴역학의 계수와 균열의 진전과정을 수치적으로 모형화하였다. 개발된 균열진전해석 알고리즘은 모드I, 모드II 및 혼합모드 상태의 대표적인 균열문제에 적용하여 응력확대계수 및 균열성장경로를 추정하고 이를 이론값과 비교함으로써 그 정확성과 효율성을 검증하였다.

핵심용어 : 확장유한요소법, 균열진전해석, 선형탄성파괴역학, 균열성장

1. 서 론

구조물에 분포하는 균열은 공용기간중의 구조적 안정성과 사용성을 감소시키는 중요한 인자로 작용한다. 특히 강재를 대상으로한 구조물의 경우에는 제작초기과정부터 여러 가지 형태의 미세결함이 분포하고 있을 뿐만 아니라 시공을 위한 부재간의 접합부위 등에서도 추가적인 결함이 발생하게 된다. 이와 같은 결함은 초기에는 미세한 형태지만 공용기간 중 작용하는 하중으로 인하여 점차 성장하게 되며 어느 정도 성장이 진행된 후에는 순간적인 과대하중에 의한 급속한 성장이 이루어지므로 구조물의 안정성과 사용수명을 감소시키는 중요인자로 작용한다. 따라서, 구조물에 분포하는 균열의 거동과 이로 인한 구조물의 영향예측을 위하여 파괴역학이론과 수치해석기법을 기반으로 이를 예측할 수 있는 다양한 기법들이 제안되었다.

이중 유한요소법은 지난 수십년간 꾸준히 연구·개발되어 오늘에 이르고 있는 공학분야의 대표적인 수치해석기법으로 지속적인 연구를 통하여 불연속면의 기하학적 특성이 변하지 않는 일반적인 공학문제에 대해서는 해석강건성(robustness)을 갖으면서도 손쉽게 정확한 해를 얻을

*정회원 · 연세대학교 토목공학과 부교수(E-mail:lee@yonsei.ac.kr)
**정회원 · 연세대학교 토목공학과 대학원 박사과정(E-mail: jhsong@csem.yonsei.ac.kr)
***정회원 · 연세대학교 수학과 대학원 박사과정(E-mail: mwkim@yonsei.ac.kr)

수 있음이 충분히 증명되었다. 그러나 갤러킨법(Galerkin method)에 의하여 편미분방정식을 선형 시스템방정식으로 정식화함에 있어서 요소를 사용하여 해석공간(approximating space)을 구성하므로 균열진전해석을 위해서는 요소망 구성상의 제약조건이 발생하는 단점이 있다. 이 문제는 실제적으로 균열전파문제를 해석하는 경우 균열의 성장단계에 따라 변화하는 기하학적 특성을 요소망을 재구성함으로써 해석에 반영해야 한다는 것을 의미한다. 이로 인하여 유한요소법의 경우 가장 일반적인 공학문제인 단일균열의 성장과정을 해석함에 있어서도 해석단계에 따라 요소망을 재구성해야 하는 단점이 지적되었다. 물론 기존의 연구를 통하여 Koh *et al*.(1995)에 의하여 제안된 이동유한요소법이나 Bittencourt *et al*.(1996)이 제안한 균열의 성장에 따라 요소망을 자동적으로 재구성하는 기법 또는 Saleh and Aliabadi(1998)와 같이 유한요소와 경계요소를 같이 사용함으로써 균열의 성장을 모형화할 수 있는 방법 등이 제안되기도 하였지만, 근본적으로 요소망 제약조건을 완전히 탈피하지 못하고 있어 기하학적 형상이 변화하는 균열해석문제에 있어서는 추가의 노력이 소요되었다.

이와 같은 문제점을 근본적으로 극복하기 위하여 1990년대 중반부터 무요소법의 개발과 적용을 위한 활발한 연구가 진행되었다. Belytschko *et al*.(1994)에 의하여 제안된 Element Free Galerkin Method(EFG), Liu *et al*.(1995)에 의한 Reproducing Kernel Particle Method(RKPM) 등으로 대표되는 일단의 무요소해석기법들(Aluru and Li, 2001; Zhang *et al*., 2001; Park and Youn, 2001; Hao *et al*., 2002)은 절점의 정보만을 사용하여 해석을 수행하므로 요소망 제약조건으로부터 자유로울 수 있었다. 따라서 기존의 요소망 의존성으로 인하여 적용에 어려움을 나타내었던 수치해석문제 등을 다루는 데 있어서 많은 학술적 연구성과를 나타내었으나 실제 공학문제를 해석하는데 있어서 유한요소법에 비해 해석강건성(robustness)의 확보가 아직까지는 미흡하고 개념상의 확연한 차이로 인하여 기존의 유한요소법을 기반으로 개발된 상용 S/W에 직접적으로 접목하여 사용할 수 없으며 구현상의 복잡함이나 계산에 소요되는 비용이 높다는 단점을 지니고 있다. 이러한 이유로 무요소법은 학문적 연구분야에서는 활발한 연구가 진행되는 반면, 빠르고 정확한 해석을 요구하는 실질적인 공학분야의 문제에 대해서는 다소의 어려움을 보이고 있다.

이와 같은 문제점으로 인하여 최근 다시 대두되고 있는 새로운 연구방향이 효율적이면서도 강건한 해석이 가능한 유한요소법을 기반으로 국부적 특이성을 요소내적으로 표현할 수 있도록 기저함수를 확장함으로써 요소망 제약조건을 극복하는 방법이며 이는 Melenk and Babuška (1996)에 의하여 제안된 단위분할법(Partition of Unity Method) 개념에 입각한 국부적 기저함수의 확장이라는 형식으로 연구가 진행되어 왔다. 이를 통하여 단위분할법 개념에 입각한 기저함수의 부분적 조작을 이용하여 국부적 특이성 문제를 최소의 요소망 재구성(minimal re-mashing)만을 이용하여 해석할 수 있는 기법(Belytschko and Black, 1999)이나 Moes *et al*.(1999)에 의한 요소망 재구성없이(without re-meshing) 균열문제를 다룰 수 있는 연구와 같이 유한요소법의 요소망 의존성을 극복하여 불연속면을 요소망에 상관없이 자유로이 다루기 위한 연구(Dolbow *et al*., 2000; 이상호와 송정훈, 2002)가 진행되고 있다. 최근에는 Daux *et al*.(2000)및 Belytschko *et al*.(2001)에 의하여 임의의 형상으로 교차하는 균열까지도 요소망 제약조건 없이 해석할 수 있는 기법과 임의의 다수의 공극이 분포하는 해석대상체의 자유로운 해석이 가능한 기법(Sukumar *et al*., 2000a) 및 이를 3차원 문제에 적용하고자 한 연구(Sukumar *et al*., 2000b) 등이 진행되었다.

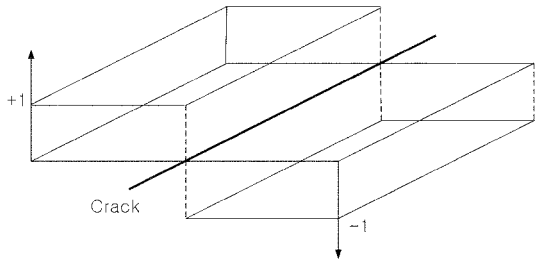
본 연구는 이와 동일한 연구선상에서 실제적인 공학문제의 적용성을 극대화시킬 수 있도록 확장유한요소법을 이용하여 균열성장에 따라 변화하는 기하학적 형상에 대해서도 요소망 구성의 제약조건 없이 균열진전해석이 가능한 알고리즘을 제안하고 그 정확성을 검증하고자 한다. 확장유한요소법의 적용을 위하여 우선 확장유한요소법의 수정된 근사변위함수 도출과정을 서술하고 균열진전해석을 위하여 필요한 파괴역학계수의 산정 및 균열진전의 수치적 모형화에 대한 기법을 제시하였으며 이를 균열선단의 응력특이성 및 응력확대계수에 대한 조각시험과 대표적인 균열문제에 적용하여 개발된 알고리즘의 정확성과 효율성을 검증하였다.

2. 불연속 계단함수와 특이함수를 이용한 근사변위함수의 확장

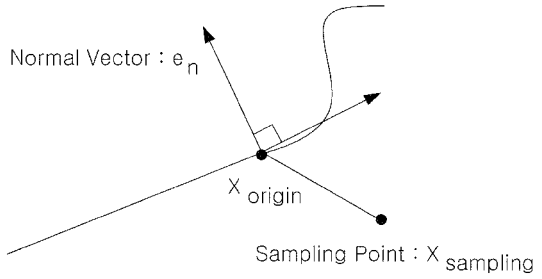
2.1 균열면 불연속성의 표현을 위한 확장

기존의 유한요소해석기법에서 사용되었던 형상함수를 이용해서는 요소내에서 균열로 인한 변위 및 응력에서 발생하는 불연속성을 표현할 수 없다. 이는 전체 해석영역에 대하여 수학적으로 동일한 개념의 형상함수를 사용함으로 인하여 균열과 같은 국부적 특이성의 자유로운 표현 및 반영이 불가능하기 때문이다. 이를 위하여 기존에는 균열을 해석하기 위해서 요소망을 불연속적으로 구성하는 방법을 이용하였다.

그러나, 본 연구에서는 단위분할법의 개념을 근간으로 하여 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있는 추가의 형상함수를 활용함으로써 요소망 제약조건 없이 요소내에서의 불연속성 표현이 가능하도록 하였다. 추가의 형상함수는 균열로 인하여 발생하는 변위 및 응력의 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있도록 균열면을 경계로 양·음의 단위값을 갖는 불연속 계단함수(discontinuity step function)의



(a)



(b)

그림 1. 균열면의 불연속성 표현을 위한 불연속함수의 형상 및 정의 좌표계 (a) 균열면의 표현을 위한 불연속함수, (b) 불연속함수의 정의를 위한 국부좌표계

형태를 취한다. 이는 수학적으로 불연속성을 표현할 수 있는 가장 간단한 방법으로써 그림 1(a)와 같은 형태를 갖으며 그 값은 그림 1(b)와 같은 국부좌표계에서 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{H}(x)=\begin{cases}+1 & \text{for } (\boldsymbol{x}_{sampling}-\boldsymbol{x}_{origin})\cdot\boldsymbol{e}_n>0\\ -1 & \text{for } (\boldsymbol{x}_{sampling}-\boldsymbol{x}_{origin})\cdot\boldsymbol{e}_n<0\end{cases} \tag{1}$$

이와 같은 불연속 계단함수는 식 (2)와 같이 기존 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수에 단위분할법의 개념을 근간으로 추가적으로 사용되어 요소망의 불연속한 구성에 의존하지 않고 요소 내에서도 변위 및 응력의 불연속성을 묘사할 수 있게 된다. 특히 추가확장에 사용되는 절점은 기존의 요소망에 새로운 절점을 추가하여 사용하지 않고 균열의 불연속성을 묘사할 필요가 있는 요소의 절점, 즉 균열에 의하여 관통된 요소의 기존 절점을 사용함으로써 추가적인 계산량이 매우 작게 요구되므로 효율성 측면에서 우수하다.

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in I}N_i(\boldsymbol{x})d_i+\sum_{j\in J}N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})a_j=\boldsymbol{Nd}+\boldsymbol{NHa} \tag{2}$$

위의 식에서 I는 해석대상체내의 모든 절점이며, J는 균열이 관통하는 요소의 절점을 나타낸다. 또한 $N_i(\boldsymbol{x})$는 기존의 유한요소법에서 사용되었던 일반적인 형태의 형상함수이고, $N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$는 불연속 계단함수를 적용하여 불연속성을 표현한 추가적인 형상함수를 나타낸다. 이때, 추가적인 형상함수는 실제 수치해석프로그램 구현시 새로운 형상함수를 정의하여 사용하지 않고 다만 기존의 형상함수를 이용하여 적분점에서 사용하는 가중함수의 부호를 균열면의 상하부의 위치에 따라 결정해 줌으로써 손쉽게 구성할 수 있다.

2.2 균열선단 응력특이성의 표현을 위한 확장

균열선단에서는 응력집중으로 인한 응력특이성이 발생하며, 이를 표현하기 위하여 기존의 유한요소해석기법에서는 균열선단주변에 특이요소(singular element)를 사용하였다. 그러나 특이요소의 사용 역시 균열선단이 요소내에 위치하였을 경우에는 특이성의 반영이 불가능하여 특이요소의 절점에 균열선단이 위치하도록 요소망을 재구성해야 하는 제약조건이 있었다. 따라서 본 연구에서는 균열선단의 응력특이성을 표현할 수 있는 추가적인 함수를 개발하고 이를 단위분할법 개념에 입각하여 도입함으로써 요소내에서도 자유로운 응력특이거동의 묘사를 가능하도록 하였다. 이를 위하여 균열선단 주변에서 발생하는 특이성을 반영할 수 있는 식 (3)과 같은 4개의 특이함수를 사용하였다. 이 함수들은 국부적으로 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수에 더해져서 사용되어 변위의 근사에 대해서는 $\sqrt{r}$ 성분을 표현하며 미분값인 응력성분에 대해서는 $1/\sqrt{r}$ 을 표현할 수 있도록 제안된 것이다. 이는 Fleming *et al.*(1997)과 이상호와 윤영철(2001)이 제안하였던 개선된 EFGM(Element Free Galerkin Method)에서 사용되었던 특이함수와 동일한 형태를 취하고 있으며 선형조합을 통하여 균열선단의 변위를 나타내는 이론해를 완전히 표현할 수 있도록 제안되었다.

$$\boldsymbol{g}(x)=\{\sqrt{r}\sin(\theta/2),\ \sqrt{r}\cos(\theta/2),\ \sqrt{r}\sin\theta\sin(\theta/2),\ \sqrt{r}\sin\theta\cos(\theta/2)\} \tag{3}$$

이 4개의 특이함수는 그림 2와 같이 균열선단을 원점으로 하여 정의된 국부좌표계상에서 정의된 함수이다.

이와 같이 정의된 함수들은 균열이 요소의 좌측중앙부로부터 시작하여 그 선단이 중앙에 위치하였을 경우 요소내에서 그림 3과 같은 형태를 가지고 있다.

이 특이함수들을 이용하여 식 (4)와 같이 기존 유한요소법의 근사변위함수를 확장하면 요소망 제약조건 없이

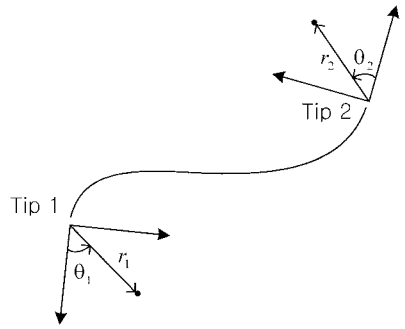


그림 2. 균열선단 특이함수정의를 위한 국부좌표계

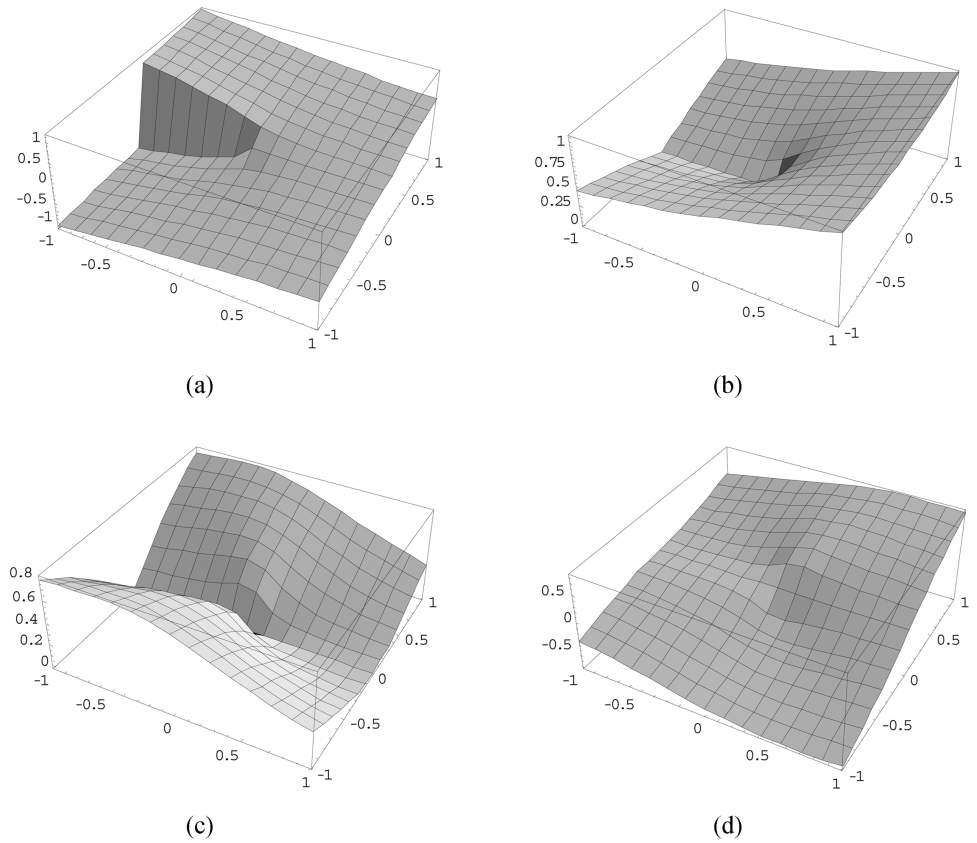


그림 3. 균열선단 응력특이성 표현을 위한 특이함수 형상 (a) $\sqrt{r}\ \sin(\theta/2)$, (b) $\sqrt{r}\ \cos(\theta/2)$, (c) $\sqrt{r}\ \sin\theta\sin(\theta/2)$, (d) $\sqrt{r}\ \sin\theta\cos(\theta/2)$

균열선단의 특이성을 요소 내에서도 표현할 수 있다. 또한, 확장에 관련된 식들이 모두 균열선단이 위치한 요소의 절점 위에서만 추가적으로 고려되므로 균열선단의 위치에 따라 국부적으로 자유롭게 확장할 수 있다.

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in I}N_i(\boldsymbol{x})d_i+\sum_{k\in K}\sum_{l=1}^{4}N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})b_{kl}=\boldsymbol{Nd}+\boldsymbol{Ngb} \qquad (4)$$

여기서, I는 전체절점을 뜻하며, K는 전체절점중 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한, $N_i(\boldsymbol{x})$은 기존의 형상함수이며 $N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})$는 균열선단의 특이성을 표현할 수 있도록 제안된 추가적인 형상함수이다.

2.3 불연속형상함수와 특이형상함수를 사용하여 확장된 근사변위함수 및 계방정식

본 절에서는 앞에서 제안된 추가의 형상함수들을 동시에 고려하여 해석대상체 내에 분포하는 균열로 인한 불연속면을 요소망 제약조건 없이 모형화할 수 있는 확장된 근사변위함수를 제안하고자 한다. 이를 위하여 그림 4와 같이 균열이 있는 일반적인 해석대상체를 가정한다.

이 해석대상체에 대하여 추가적인 확장이 필요한 절점의 집합을 각각 J와 K라 하면 J는 균열면의 불연속성을 표현하기 위하여 앞에서 제안한 불연속 계단함수가 적용될 절점으로 위의 그림에서 사각형으로 표현된 절점이

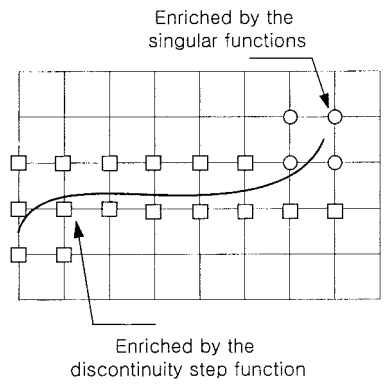


그림 4. 국부적특성 반영을 위하여 추가의 형상함수로 확장된 절점

며, K는 균열선단의 응력특이성 표현을 위하여 특이함수로 확장이 필요한 원으로 표현된 절점이다. 각 절점에서 추가적으로 표현이 필요한 국부적 특성들을 고려하여 식 (5)와 같이 기존의 근사변위함수를 확장할 수 있다.

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in I}N_i(\boldsymbol{x})d_i+\sum_{j\in J}N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})a_j$$
$$+\sum_{k\in K}\sum_{l=1}^{4}N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})b_{kl}=\boldsymbol{Nd}+\boldsymbol{NHa}+\boldsymbol{Ngb} \qquad (5)$$

여기서, I는 해석대상체 내의 전체 절점이며, J와 K는 각

각 균열에 의해서 관통된 요소의 절점과 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한, $N_i(\boldsymbol{x})$는 기존 유한요소법의 형상함수이고, $N_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$와 $N_k(\boldsymbol{x})g_l(\boldsymbol{x})$는 앞에서 언급된 추가적인 형상함수들이다. 식 (6)은 근사변위함수의 이산화된 미분을 나타내며 계방정식의 최종해를 찾은 후 해석대상체 내의 응력을 산정할 때 사용하게 된다.

$$u^h_{,i}(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in I}N_{i,i}(\boldsymbol{x})d_i+\sum_{j\in J}N_{j,i}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})a_j + \sum_{k\in K}\sum_{l=1}^{4}\{N_{k,i}(\boldsymbol{x})g_l+N_k(\boldsymbol{x})g_{l,i}(\boldsymbol{x})\}b_{kl} \tag{6}$$

식 (5)와 식 (6)을 2차원 선형탄성문제의 지배방정식으로부터 유도한 약형식에 대입하여 Galerkin 방법에 따라 이산화하여 얻은 최종적인 계방정식의 형태는 식 (7)과 같으며, 각각을 구성하는 성분들은 식 (8)-(16)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{II} & \boldsymbol{K}_{IJ} & \boldsymbol{K}_{IKl} \\ \boldsymbol{K}_{IJ}^T & \boldsymbol{K}_{JJ} & \boldsymbol{K}_{JKl} \\ \boldsymbol{K}_{IKl}^T & \boldsymbol{K}_{JKl}^T & \boldsymbol{K}_{KKkl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_I \\ \boldsymbol{a}_J \\ \boldsymbol{b}_{Kk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_I \\ \boldsymbol{f}_J \\ \boldsymbol{f}_{Kk} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}_{II}=\int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_I d\Omega \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ}=\int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J\boldsymbol{H} d\Omega \tag{9}$$

$$\boldsymbol{K}_{IKl}=\int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}_K\boldsymbol{g}_l+\boldsymbol{N}_K g_{l,i})d\Omega \quad l=1,\ldots,4 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}_{JJ}=\int_\Omega (\boldsymbol{B}_J\boldsymbol{H})^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J\boldsymbol{H}\, dB \tag{11}$$

$$\boldsymbol{K}_{JKl}=\int_\Omega (\boldsymbol{B}_J\boldsymbol{H})^T\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}_K\boldsymbol{g}_l+\boldsymbol{N}_K\boldsymbol{g}_{l,i})d\Omega \quad l=1,\ldots,4 \tag{12}$$

$$K_{KKkl}=\int_\Omega (\boldsymbol{B}_K\boldsymbol{g}_k+\boldsymbol{N}_K\boldsymbol{g}_{k,i})^T\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}_K\boldsymbol{g}_l+\boldsymbol{N}_K\boldsymbol{g}_{l,i})d\Omega \quad k,l=1,\ldots,4 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{f}_I=\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{N}_I^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma+\int_\Omega \boldsymbol{N}_I^T\boldsymbol{b}d\Omega \tag{14}$$

$$\boldsymbol{f}_J=\int_{\Gamma_t}(\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{H})^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma+\int_\Omega (\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{H})^T\boldsymbol{b}d\Omega \tag{15}$$

$$\boldsymbol{f}_{Kk}=\int_{\Gamma_t}(\boldsymbol{N}_K\boldsymbol{g}_k)^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma+\int_\Omega (\boldsymbol{N}_K\boldsymbol{g}_k)^T\boldsymbol{b}d\Omega \quad k=1,\ldots,4 \tag{16}$$

본 연구에서 제안된 근사변위함수는 균열면의 불연속성을 표현하기 위한 불연속 계단함수와 균열선단의 특이성을 반영하기 위한 특이함수를 사용하였지만 단위분할법의 개념에 따라 근사변위함수에 추가적으로 적용하였으므로 절점의 재배치나 추가·삭제의 과정이 필요없다. 이는 균열이 성장하는 과정에 대한 해석을 수행하더라도 요소망 제약조건이 없이 일반적인 요소망을 사용할 수 있음을 뜻한다.

3. 확장유한요소법을 이용한 균열진전해석 알고리즘

3.1 영역적분 형태의 교차적분을 이용한 파괴역학계수 산정

균열이 포함된 해석대상체를 대상으로 개발한 수치해석 프로그램의 정확성을 검증하거나 균열진전해석을 수행하기 위해서는 파괴역학의 계수를 수치적으로 계산하고 결정하는 과정이 필요하다. 유한요소법과 같은 수치해석기법을 사용할 때는 일반적으로 알려진 선적분형태의 J적분법을 사용하여 응력확대계수를 계산하는 것은 정확도나 효율성 측면에서 모두 몇가지 문제점을 내포하고 있다. 따라서 본 연구에서는 Yau *et al.*(1980)과 Shih and Asaro (1988)에 의해 제시된 혼합파괴모드에 대한 영역적분형태의 교차적분을 정식화하여 응력확대계수의 수치적 산정을 하였으며 이를 적용하기 위한 절차는 다음과 같다.

1) 영역적분 반경산정

균열선단을 기준으로 적분영역의 반경을 산정함으로써 영역적분에 포함될 요소를 정의한다. 물론 영역적분형태의 교차적분을 통하여 구해진 응력확대계수 역시 경로독립성(path independency)이 성립하지만 너무 넓은 적분영역을 산정하면 계산시간의 측면에서 비효율적이며, 반대로 너무 좁은 적분경로는 균열선단에서 발생한 응력특이성을 충분히 반영해 줄 수 없기 때문이다. 이를 위하여 본 연구에서는 균열선단을 포함하고 있는 요소의 넓이를 바탕으로 적분영역을 산정하기 위한 특성길이(characteristic length) r_d를 식 (17)과 같이 정의하였다(Dolbow, 1999).

$$r_d=2.0\times\sqrt{Area_{crack\ tip\ element}} \tag{17}$$

위의 식은 응력특이성을 반영하기 위하여 특이기저함수를 사용한 요소의 영향영역이 충분히 반영될 수 있도록 산정된 값이다.

2) 가중함수 구성

본 교차적분은 영역적분 형태로 계산이 수행되므로 이를 위한 적분영역내의 1차 가중함수 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$를 정의해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 적분영역에 포함되는 절점에서 정의된 형상함수를 조합하여 사용함으로써 별도의 가중함수 산정을 위한 계산이 없도록 하였다. 이는 정의된 적분영역에 대하여 적분반경내에 포함된 절점에 대해서만 형상함수를 중첩하는 방법을 통하여 가중함수 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$를 정의하는 것을 의미한다.

3) 영역 내에서의 적분수행 및 응력확대계수 산정

먼저 균열이 경사진 경우 균열선단에 대하여 경사각을 산정해야 한다. 이는 교차적분중 필요한 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ 및 모든 값들이 균열선단을 기준으로 정의된 국부좌표계를 사용하여 계산이 되는 반면 실제적인 계산에서는 이 국부좌표계를 다시 전체좌표계로 회전이동한 후 그 값을 사용하여야 하기 때문이다. 또한 교차적분은 식 (18)을 이용하여 적분영역내의 각각의 적분점에 대한 값을 모두 합산함으로써 적분을 수행한다. 이때 최종적으로 도출해내고자 하는 응력확대계수 값은 파괴모드에 따라 보조영역의 값을 적절히 선택하여 요구되는 값을 구할 수 있다(이상호와 윤영철, 1999).

$$I^{(1,2)}=\int_A\left[\sigma_{ij}^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1}+\sigma_{ij}^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}-W^{(1,2)}\delta_{1j}\right]\frac{\partial q}{\partial x_j}dA \qquad (18)$$

3.2 균열진전각의 산정

수치해석기법을 이용하여 균열진전에 대한 해석을 수행하기 위해서는 균열의 진전각 산정을 위한 수치적 계산과 적용이 필요하다. 본 연구에서는 균열의 진전방향을 계산하기 위하여 최대주응력한계이론을 사용하였는데, 이 이론에서 균열은 최대 hoop응력($\sigma_{\theta\theta}$)에 직각인 방향으로 진전한다고 가정한다. 일반적인 혼합모드의 경우 균열선단 주변에서 응력은 식 (19)에 의하여 산정되는데 최대 hoop 응력의 방향은 전단응력이 0이 되는 방향을 계산함으로써 산정할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\begin{Bmatrix}K_I(1+\sin^2(2/\theta)+K_{II}\{(3/2)\sin\theta-2\tan(\theta/2)\}\\ K_I\cos^2(2/\theta)-(3/2)K_{II}\sin\theta\\ (1/2)\{K_I\sin\theta+K_{II}(3\cos\theta-1)\}\end{Bmatrix} \qquad (19)$$

따라서, 식 (19)의 $\sigma_{r\theta}$항을 0이 되도록 하는 조건식 식 (20)과 같은 값을 구해야 한다.

$$K_I\sin\theta_c+K_{II}(3\cos\theta_c-1)=0 \qquad (20a)$$

$$\theta_c=2\arctan\left\{(1/4)(K_I/K_{II}\pm\sqrt{(K_I/K_{II})^2+8})\right\} \qquad (20b)$$

여기서, θ_c는 균열 진전각이다.

3.3 균열진전에 따른 국부적특성의 모형화

확장유한요소법을 적용하여 균열진전해석을 수행할 경우에는 균열의 성장에 따라 전체 해석영역에 대한 재계산을 수행하는 대신 그림 5에서 사각형 또는 원형으로 표시된 절점만을 대상으로한 국부적 계산만이 요구된다. 이와 같은 추가의 절점은 균열로 인한 응력 및 변위의 불연속성, 균열선단의 응력특이성과 같은 국부적 특성을 반영하기 위하여 앞에서 제시되었던 추가적인 형상함수로 확장되는 절점이다.

본 연구에서는 균열이 성장함에 따라 이와 같이 확장이 요구되는 절점을 자동적으로 검색할 수 있는 기하학적 알고리즘을 수치해석프로그램에 도입함으로써 균열진전해석의 전 과정을 자동화할 수 있었다. 또한 균열진전에 따른 재계산 역시 그림 5에서 표시된 추가의 확장절점부분에서만 국부적으로 이루어 지므로 기존의 유한요소법과 같이 매 균열진전해석 단계마다 전체 해석공간에 대한 계산을 다시 수행해야할 필요가 없다.

3.4 확장유한요소법을 이용한 균열진전해석 알고리즘

앞 절에서 제시한 이론들을 적용하여 균열진전해석을

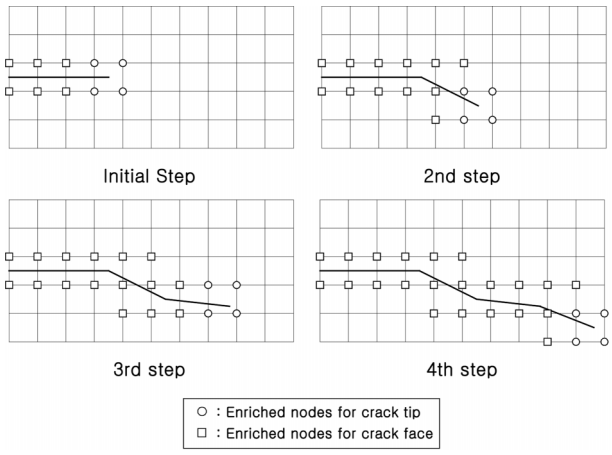


그림 5. 균열성장에 따른 절점확장

수행하기 위한 수치해석 알고리즘은 그림 6과 같다. 본 알고리즘에서는 해석결과로부터 파괴역학의 계수를 산정하고 이를 바탕으로 균열을 진전시킨 후 균열이 성장함에 따라 국부적 특이거동을 반영하기 위하여 추가의 형상함수확장이 요구되는 절점을 검색하여 이를 적절한 형태의

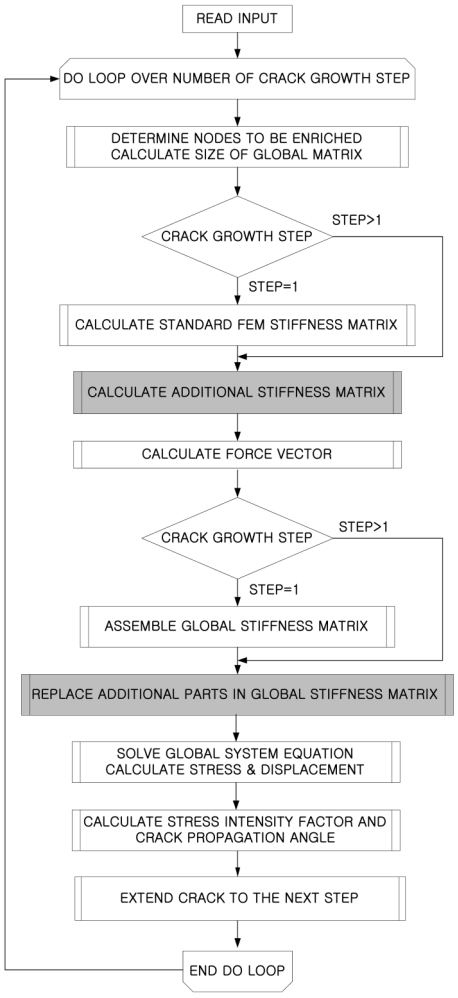


그림 6. 확장유한요소법을 이용한 균열진전해석 알고리즘

추가형상함수로 확장하는 과정을 자동화하였다. 이를 통하여 균열진전해석의 각 단계를 자동화할 수 있었으며, 그림 6에서 회색으로 표현된 부분과 같이 단위분할법에 의하여 추가적인 계산이 요구되는 부분만을 국부적으로 재계산후 전체 선형시스템방정식의 해당 부분에 대체함으로써 균열진전 해석에 있어서 전체해석영역을 대상으로 재계산을 수행할 필요가 없는 효율적인 해석이 가능하도록 하였다.

4. 수치해석예제

4.1 균열선단의 응력분포 조각시험

본 연구에서 제안된 것 같이 일반적인 해석대상체가 아닌 균열과 같은 국부적 특성을 갖고 있는 해석대상체에 대한 수치해석프로그램의 정확성 검증은 일반적인 조각시험 방법을 그대로 적용할 수 없다. 이는 일반적인 조각시험 방법을 통해서는 국부적 특성의 정확한 반영 여부를 파악할 수 없기 때문이다. 따라서 본 조각시험에서는 편측균열을 갖는 평판의 이론해로 알려져 있는 모드I에 대한 변위식 식 (21)을 이용하였다. 조각시험 방법은 우선, 이론해에 따라 모드I의 파괴형상을 가져올 수 있는 하중이 재하된 경우의 변위값을 이론해를 이용하여 미리 계산하고, 이를 다시 해석모형의 경계에 적용하여 해석을 수행함으로써 얻어진 해석모형 내부의 응력값과 이론해에 따른 식 (22)를 통하여 계산된 응력값을 비교하는 방식으로 수행되었다.

$$u_x=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\theta[\kappa-1+2\sin^2(\theta/2)] \tag{21a}$$

$$u_y=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\theta[\kappa-1+2\cos^2(\theta/2)] \tag{21b}$$

$$\sigma_y=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\theta/2)[1+\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \tag{22}$$

이는 본 연구에서 제안한 균열이 고려된 확장근사변위함수가 정확하다면 이를 적용하여 수행된 해석대상체 내의 응력분포가 이론해를 통하여 계산된 응력분포와 동일할 것이므로 이 두 값의 비교를 통하여 그 정확성을 검증할 수 있기 때문이다.

본 수치예제에서는 그림 7(a)와 같이 균열길이는 a이고, 균열선단은 좌표 (1.0a,1.0a)에 위치하며, 해석모형의 가로, 세로의 길이는 각각 2a이다. 응력확대계수는 1.0으로 미리 규정하였다. 해석결과 그림 7(b)와 같이 균열선단의 특이성을 요소망 제약조건 없이 요소내에서도 잘 묘사해 주고 있음을 확인할 수 있다.

4.2 균열회전각에 따른 응력확대계수 조각시험

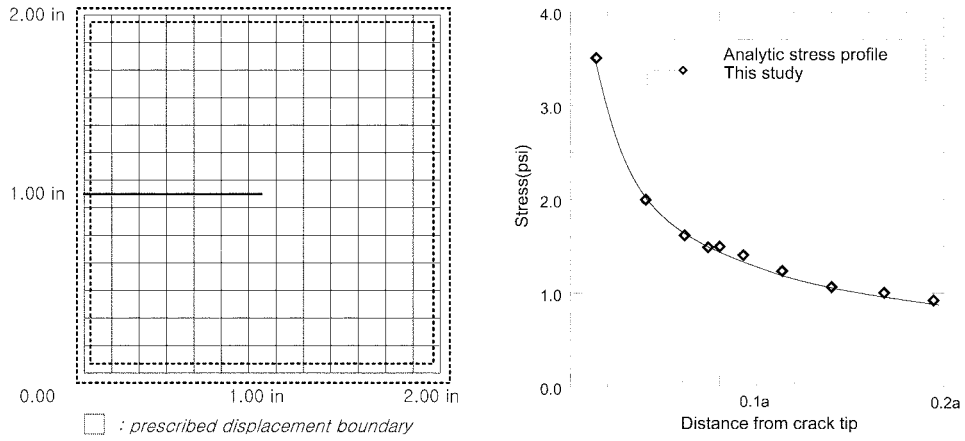
본 연구의 경우에는 균열진전해석까지를 연구범위로 하고 있다. 따라서 균열의 진전양상을 결정하는 주요한 파괴역학인자 중 하나인 응력확대계수에 대한 검토를 수행하는 것이 필요하다. 이를 위하여 그림 8(a)와 같이 중앙에 균열이 분포하는 부재에 대하여 양 끝단에 1psi(7.0×10^{-2}kgf/cm^2)의 등분포하중을 작용시키고 초기균열각 β를 변화시켜가며 각 상태에서의 모드I 및 모드II 응력확대계수를 산정하였다.

이를 위하여 본 시험에서는 가로와 세로의 길이가 모두 10 in인 부재를 400개의 요소(20×20)로 구성된 요소망을 사용하여 해석을 수행하였으며 균열의 길이는 1 in로 하였다. 또한, 부재의 크기가 균열의 크기와 비교하였을 때 충분히 크므로 무한판에 대한 이론해와 비교하였다. 이 경우 모드I 및 모드II의 응력확대계수는 식 (23)과 같이 균열회전각 β의 함수로 표현된다(Dolbow, 1999).

$$K_I=\sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\beta \tag{23a}$$

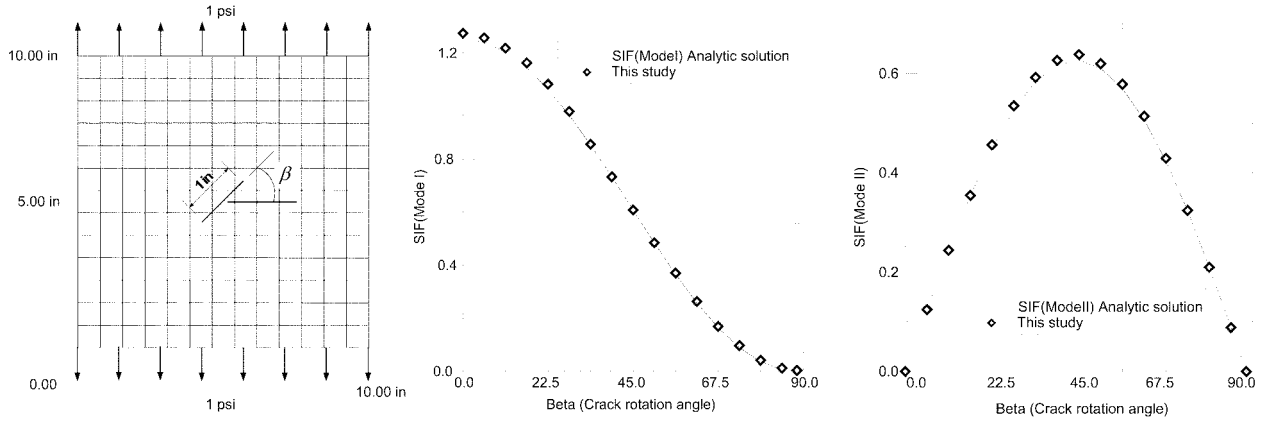
$$K_{II}=\sigma\sqrt{\pi a}\sin\beta\cos\beta \tag{23b}$$

그림 8(b) 및 8(c)는 균열의 회전각에 대하여 계산된 각



(a) (b)

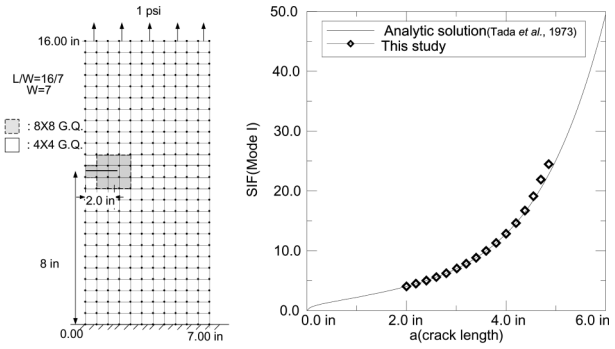
그림 7. 균열선단의 응력특이성 검토를 위한 시험모형 및 해석결과 (a) 편측균열 시험모형, (b) 균열선단의 응력(σ_y) 분포($\theta=0$, $r>0$)



(a) (b) (c)

그림 8. 균열각에 따른 응력확대계수 검토를 위한 시험모형 및 해석결과(단위: $psi\sqrt{in}$) (a) 경사균열 시험모형, (b) 모드I 응력확대계수(K_I), (c) 모드II 응력확대계수(K_{II})

각의 모드에 대한 응력확대계수를 식 (23)의 이론해와 비교하여 도시한 것이다. 결과에서 확인할 수 있듯이 균열의 회전각이 0°에서 90°까지 변화함에 따라 본 연구에서 제안된 방법으로 계산된 응력확대계수값이 이론해와 잘 일치함을 확인할 수 있다.



(a) (b)

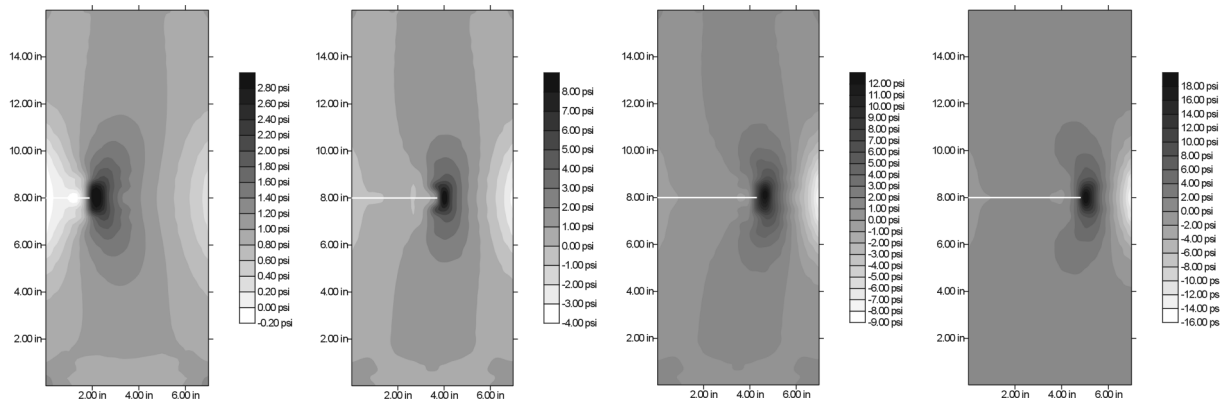
그림 9. 인장하중을 받는 편측균열 모형 및 해석결과(단위: $psi\sqrt{in}$) (a) 편측균열 모형, (b) 균열성장에 따른 응력확대계수(K_I)

4.3 인장하중을 받는 편측균열

그림 9(a)와 같이 한쪽에 편측균열이 존재하고 하단이 고정되어 있으며 상단에 1psi(7.0×10^{-2}kgf/cm^2) 크기의 인장하중을 받는 문제를 해석하였다. 재료상수는 탄성계수 $E=3\times10^6$ psi(42.6×10^6 kgf/cm^2)이고 포아송비 $\nu=0.3$이다. 해석을 위하여 312개의 절점으로 이루어진 275(11×25)개의 요소를 사용하였으며, 확장된 형상함수가 사용된 요소에 한해서는 8×8의 가우스적분점을 사용하였고 이외에는 4×4 적분점을 사용하였다. 그림 9(b)는 균열이 성장함에 따라 본 연구를 통하여 해석된 모드I 응력확대계수값을 이론해와 비교하여 도시한 것이다(Tada *et al.*, 1973). 이와 같은 균열진전 단계에 있어서 그림 10은 해석결과를 바탕으로 수직방향의 응력상태를 도시한 것으로 균열이 성장함에 따라 균열선단에서 점점 더 응력이 집중됨을 확인할 수 있다.

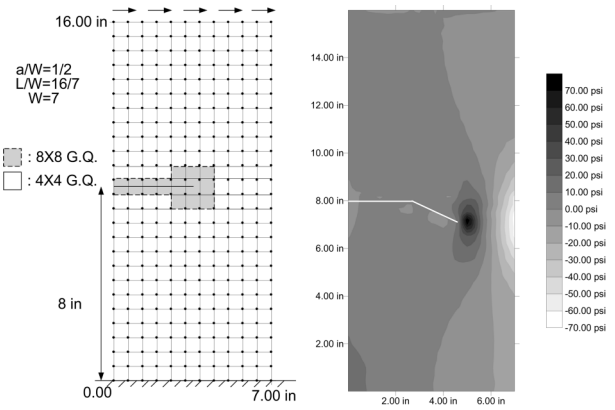
4.4 전단하중을 받는 편측균열

본 수치예제는 모드I과 모드II 상태가 동시에 발생하는



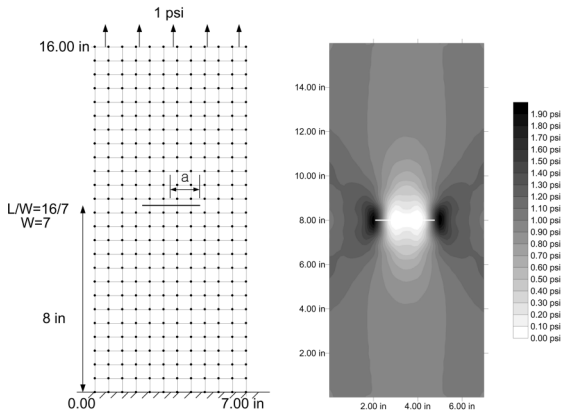
(a) (b) (c) (d)

그림 10. 균열성장에 따른 응력(σ_y) 분포(단위: psi) (a) 초기단계, (b) 6단계 해석 후, (c) 11단계 해석 후, (d) 16단계 해석 후



(a) (b)

그림 11. 전단하중을 받는 편측균열 모형 및 해석결과(단위: psi)
(a) 편측균열 모형, (b) 최종해석 단계의 응력(σ_y)의 분포



(a) (b)

그림 12. 인장하중을 받는 중앙균열 모형 및 해석결과(단위: psi)
(a) 중앙균열 모형, (b) 초기해석 단계의 응력(σ_y) 분포

혼합모드상태의 균열문제를 대상으로 그림 11(a)와 같이 하단을 고정시키고 상단에는 전단응력 1psi(7.0×10^{-2}kgf/cm^2)을 작용시켰다. 정지상태에 대한 균열해석을 한 후 균열을 진전시키는 해석을 수행하여 균열의 성장경로를 추정하였다. 그림 11(b)는 해석 종료단계에서의 응력분포도를 나타내고 있는데 균열이 혼합모드를 유발하는 전단하중에 의해 꺾이면서 성장하여 균열선단에서의 응력집중현상이 발생함과 동시에 최종단계에서 균열의 앞쪽에 매우 큰 압축응력을 유발되고 있음을 명확히 확인할 수 있다. 재료상수와 부재의 치수는 앞의 예제와 같다.

초기 상태에서의 이 문제에 대한 이론해는 Wilson (1969)이 제시한 값을 사용하였으며 표 1과 같이 혼합모드에 대해서도 비교적 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

4.5 인장하중을 받는 중앙균열

본 수치예제는 부재의 중앙에 발생한 균열이 그림 12(a)와 같이 1psi(7.0×10^{-2} kgf/cm^2)의 인장력을 받는 경우를 가정하여 성장해 나가는 과정을 해석한 것으로서 해석대상체의 물성치는 앞의 예제들과 동일하다. 그림 12(b)는 초기상태의 해석결과를 도시한 것으로써 좌우대칭성 및 균열선단들에서의 응력집중 현상 등과 같은 일반적인 예상결과가 잘 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

또한, 그림 13은 균열의 길이를 증가시키면서 계산한 응력확대계수값을 Rooke and Cartwright(1974)에 의해 제시된 이론해와 비교하여 도시한 것이다. 그림에서 알

표 1. 혼합모드 응력확대계수의 오차(K_I) (단위 : $psi\sqrt{in}$) (Wilson, 1969)

	이론해	본연구	오차(%)
K_I	34.00	32.40	4.70
K_{II}	4.55	4.51	0.87

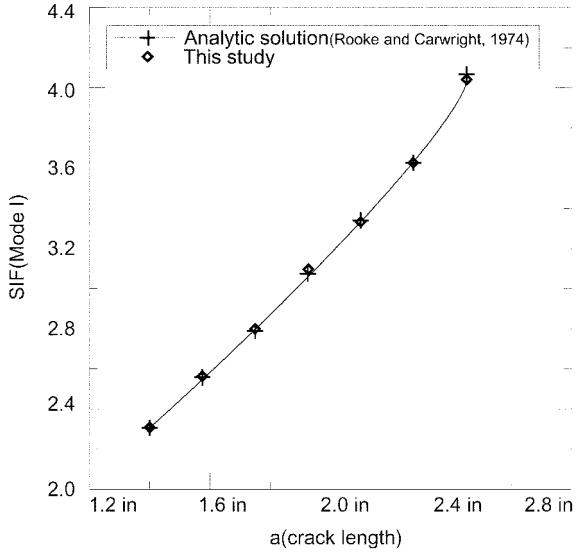


그림 13. 균열성장에 따른 응력확대계수(K_I) (단위: $psi\sqrt{in}$)

수 있듯이 신뢰할 수 있는 높은 정도를 지니며 균열진전 해석의 수행이 가능함을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 기존의 유한요소법에서 사용되었던 근사변위함수에 균열이 갖는 불연속성과 균열선단의 응력특이성을 반영할 수 있는 불연속 계단함수 및 특이함수를 단위분할법의 개념에 입각하여 확장, 적용함으로써 요소망에 대한 제약조건 없이 균열진전문제를 해석할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 본 연구를 통한 구체적인 결론은 다음과 같다.

1. 균열면에서 발생하는 응력 및 변위의 불연속성은 불연속기저함수를 국부적으로 추가함으로써 요소망의 제약을 받지 않고 효과적으로 묘사되었으며, 이를 통하여 기존의 유한요소법에서 불연속면을 표현하기 위하여 요

소망을 불연속적으로 구성해야 했던 제약조건을 극복할 수 있었다.

2. 균열선단의 응력특이성은 기존의 이론해를 완전히 재생할 수 있는 4개의 특이기저함수를 선형조합하여 균열선단주변에서만 국부적으로 사용함으로써 기존과 같이 특이요소를 도입하거나 세밀한 요소망을 구성하지 않고도 균열선단의 특이성을 정확히 표현할 수 있었다.
3. 수치예제에서 볼 수 있듯이, 단일모드 및 혼합모드 상태의 파괴현상에 대한 응력확대계수에 대한 수치해 역시 신뢰할 수 있는 정확도로 산정되었다.
4. 본 연구를 통하여 제안된 균열진전해석 알고리즘은 해석과정들을 자동화함으로써 연속적으로 변화하는 불연속면이 포함된 파괴역학 문제에 대한 효율적인 해석이 가능하였다.

감사의 글

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구(KRF-2002-042-D00115)되었으며, 이에 재단에 감사드립니다.

참고문헌

이상호, 윤영철 (1999) Element-Free Galerkin법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석, **한국전산구조공학회 논문집**, Vol. 12, pp. 485-494.

이상호, 윤영철 (2001) 특이기저함수를 이용하여 개선한 Mesh-free 균열해석기법, **한국전산구조공학회 논문집**, Vol. 14, pp. 381-390.

이상호, 송정훈 (2002) 확장유한요소법을 통한 요소망제약조건이 없는 균열해석기법 개발, **2002년도 가을 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집**, Vol. 15, pp. 112-119.

Aluru, N.R. and Li, G. (2001) Finite Cloud Method: a True Meshless Technique base on a Fixed Reproducing Kernel Approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 2373-2410.

Belytschko, T. and Black, T. (1999) Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, *International Journal of Numerical Mechanics in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620.

Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. (1994) Element-free Galerkin Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256.

Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. and Parimi, C. (2001) Arbitrary Discontinuities in Finite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 993-1013.

Bittencourt, T.N., Wawrzynek, P.A. and Ingraffea, A.R. (1996) Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problem, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, pp. 321-334.

Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N. and Belytschko, T. (2000) Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1741-1760.

Dolbow, J. (1999) *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*, Ph.D thesis, Northwestern University, Evanston.

Dolbow, J., Mosë, N. and Belytschko, T. (2000) Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, pp. 235-160.

Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T. (1997) Enriched Element Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504.

Hao, S., Park, H. S. and Liu, W. K. (2002) Moving Particle Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp.1937-1958.

Koh, H. M., Lee, H. S. and Jeong, U. Y. (1995) An Incremental Formulation of the Moving-grid Finite Element Method of the Prediction of Dynamic Crack Propagation, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 158, pp. 295-309.

Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. (1995) Reproducing Kernel Particle Methods, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106.

Melenk, J.M. and Babuška, I. (1996) The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314.

Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999) A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150.

Park, S. H. and Youn, S. K. (2001) The Least-squares Meshfree Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, pp. 997-1012.

Rooke, D.P. and Cartwright, D.J. (1974) *Stress Intensity Factors, Royal Aircraft Establishment*, University of Southampton.

Saleh, A.L. and Aliabadi, M.H. (1998) Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete using BEM, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, pp. 949-958.

Shih, C.F. and Asaro, R.J. (1988) Elastic-plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces : Part I - Small Scale Yielding, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 299-316.

Sukumar, Chopp, D.L., Moes, N. and Belytschko, T. (2000a) Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the eXtended Finite Element Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6183-6200.

Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. and Belytschko, T. (2000b) Extended Finite Element Method for Three-dimensional Crack Modeling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1549-1570.

Tada, H, Paris, P.C. and Irwin, G.R. (1973) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation.

Wilson, W.K. (1969) *Combined-Mode Fracture Mechanics*, Ph. D. dissertation, University of Pittsburgh.

Yau, J.F., Wang, S.S., and Corten, H.T. (1980) A Mixed-mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341.

Zhang, X., Liu. X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W. (2001) Least-squares Collocation Meshless Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, pp. 1089-1100.

(접수일:2003.1.20/심사일:2003.6.9/심사완료일:2003.8.28)