JOURNAL OF SOVIET MATHEMATICS

February, 1983

Volume 21, Number 3

February 12, 1983

This issue is a translation of Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova Akad. Nauk SSSR (Notes of Scientific Seminars of the V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad Branch, Academy of Sciences of the USSR), Vol. 84, 1979. This issue is entitled Boundary-Value Problems of Mathematical Physics and Related Questions in the Theory of Functions, Part 11, and is edited by O. A. Ladyzhenskaya.

CONTENTS

STABILITY AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INVERSE KINEMATIC PROBLEM OF SEISMOLOGY IN HIGHER DIMENSIONS

G. Ya. Beil'kin (G. Beylkin)

UDC 550.344

The following inverse kinematic problem of seismology is considered. In the compact domain M of dimension $\nu \geqslant 2$ with the metric $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, we consider the problem of constructing a new metric $du = n\,ds$ according to the known function $\tau(\xi,\eta) = \int_{K_{\xi,\eta}} n\,ds$, where $\xi,\eta \in \partial M$ and $K_{\xi,\eta}$ is the geodesic in the metric du, connecting the points ξ, η. ~~One~~ We prove uniqueness and ~~one~~ obtain a stability estimate

$$\int_M (n_2-n_1)(n_2^{\nu-1}-n_1^{\nu-1})dx^1\wedge\ldots\wedge dx^\nu \leqslant \int_{\partial M\times\partial M} \Omega^{\tau_1,\tau_2},$$

where the refraction indices n_1, n_2 are the solutions of the inverse kinematic problem, constructed relative to the functions τ_1, τ_2, respectively, $g = \det g_{ij}$; Ω^{τ_1,τ_2} is the differential form on $\partial M\times\partial M$

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2} = -\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{2\pi^{\nu/2}(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2} D_\eta\tau\wedge D_\xi\tau\wedge(D_\eta D_\xi\tau_1)^\alpha\wedge(D_\eta D_\xi\tau_2)^\beta$$

where $\tau = \tau_2 - \tau_1$, $D_\xi = d\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}$, $D_\eta = d\eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}$.

One of the fundamental problems of geophysics is the investigation of the inner ~~construction~~ structure of the Earth, including the investigation of the distribution of the velocities of the elastic waves inside the terrestrial sphere.

The problem of the determination of the velocity from the known travel ~~running~~ times of waves between points on the surface is called the inverse kinematic problem of seismology. An extensive ~~wide~~ literature has been devoted to its mathematical aspects. ~~One has proved~~ The uniqueness of the solution in the class of refraction indices close to a constant for sufficiently small convex domains in the plane was proven in [1]. ~~One has obtained~~ A stability estimate was obtained and ~~one has proved~~ uniqueness was proved in the case of a bounded domain in the plane [2, 3].

In the present note we give a stability estimate and we prove the uniqueness of the solution of the inverse kinematic problem of seismology for the case of domains of dimension greater than two.*

We consider a compact domain M of dimension $\nu \geqslant 2$ with a smooth boundary ∂M. Assume that in M there is given the metric $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. In geophysics, M is a three-dimen-

*The results of this paper have been presented at the Leningrad Otd. Mat. Inst. Seminar on the mathematical problems of diffraction theory, on April 25, 1978.

Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova Akad. Nauk SSSR, Vol. 84, pp. 3–6, 1979.

sional ball, being the model of the Earth, and $g_{ij}=\delta_{ij}$. Assume that a function τ, defined on $\partial M \times \partial M$, is known, its physical meaning being the ~~running~~ travel time of waves between points on the surface.

The question is, can one introduce a new metric $du = n ds$, such that the function τ is representable in the form

$$\tau(\xi,\eta) = \int_{\mathcal{K}_{\xi,\eta}} n ds$$

where $\xi, \eta \in \partial M$, and $\mathcal{K}_{\xi,\eta}$ is the geodesic in the metric du, joining the points ξ and η? The formulated problem (the determination of the refraction index n from the ~~hodograph~~ function ~~of~~ τ) is called the inverse kinematic problem.

It is directly related to the boundary value problem

$$\begin{cases} \nabla_\xi (\nabla_x u)^2 = 0 & x \in M \setminus \partial M, \xi \in \partial M \\ u|_{\partial M \times \partial M} = \tau \end{cases} \tag{1}$$

where ∇_x, ∇_ξ are the gradients in the metrics of M and ∂M, respectively.

Clearly, the inverse kinematic problem is nonlinear since the family of geodesics is not known in advance.

We describe the class of refraction indices in which a stability estimate is obtained. Let $S^{\nu-1}(x)$ be a sphere of sufficiently small radius with center at an arbitrary interior point x of the domain M and let $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$ be the family of geodesics of the metric nds, joining x with the points ξ of the boundary ∂M. Then, through each point on the sphere $S^{\nu-1}(x)$ there passes a unique geodesic of the family $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$. We consider the mapping K_x:

$$K_x : S^{\nu-1}(x) \longrightarrow \partial M, \tag{2}$$

which associates to the point $\theta \in S^{\nu-1}(x)$ the point ξ of the boundary ∂M, lying on the same geodesic from the family $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$ as the point θ.

We denote by N the class of refraction indices (real positive functions in the domain M) such that for any point $x \in M \setminus \partial M$ the mapping (2) is an orientation preserving C^1-diffeomorphism.

We elucidate the physical sense of the last condition. It is satisfied if the domain and the refraction index are such that a source, placed at an arbitrary interior point, illuminates the entire boundary ∂M, which can be smoothly "contracted" along the geodesics into a small sphere around the source.

<u>THEOREM.</u> If the solution of the inverse kinematic problem exists in the class N, then it is unique and we have the stability estimate

$$\int_M (n_2 - n_1)(n_2^{\nu-1} - n_1^{\nu-1})\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^\nu \leqslant \int_{\partial M \times \partial M} \Omega^{\tau_1,\tau_2}, \tag{3}$$

where the refraction indices n_1, n_2 are the solutions of the inverse kinematic problem from the class N, constructed from the functions τ_1, τ_2, respectively; $g = \det g_{ij}$. Here Ω^{τ_1,τ_2} is a differential form which can be written in the form

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2}(\xi,\eta)=-\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{2\pi^{\nu/2}(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2} D_\eta\tau\wedge D_\xi\tau\wedge(D_\eta D_\xi\tau_1)^\alpha\wedge(D_\eta D_\xi\tau_2)^\beta,$$

where $\tau=\tau_2-\tau_1$, $D_\eta=d\eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}$, $D_\xi=d\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}$,

$$D_\eta D_\xi=d\eta^i\wedge d\xi^j\frac{\partial^2}{\partial\eta^i d\xi^j}\ ,\ \xi,\eta\in\partial M\ ,\ i,j=1,\dots\nu-1\,.$$

By $\wedge$ we have denoted the operation of the exterior multiplication of differential forms.

We consider the functions $u_\sigma(\xi,x)$ $\sigma=1,2$.

$$u_\sigma(\xi,x)=\int_{K^\sigma_{\xi,x}} n\,ds,$$

which are the solutions of the problem (1), with the boundary condition $u_\sigma(\xi,\eta)=\tau_\sigma(\xi,\eta)$ where $\eta\in\partial M$. With the functions u_σ one can associate the differential forms "solid angle" [4] $\omega_o^\sigma(\theta,x)$, $\theta\in S^{\nu-1}(x)$, such that

$$\int_{S^{\nu-1}(x)}\omega_o^\sigma(\theta,x)=\frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\qquad \sigma=1,2\,.$$

Here $S^{\nu-1}(x)$ is a sphere of sufficiently small radius with center at the point $x\in M\setminus\partial M$.

A fundamental role in the proof of the theorem is played by

LEMMA. If the conditions of the theorem hold, then we have the identity

$$\sqrt{g}\,(n_1^\nu\overset{1}{\omega}_o+n_2^\nu\overset{2}{\omega}_o-g^{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x^i}\frac{\partial u_2}{\partial x^j}(n_1^{\nu-2}\overset{1}{\omega}_o+n_2^{\nu-2}\overset{2}{\omega}_o))\wedge dx^1\wedge\dots\wedge dx^\nu=D\Omega^{u_1,u_2}, \tag{4}$$

where Ω^{u_1,u_2} is a differential form representable ~~in the form~~ as

$$\Omega^{u_1,u_2}(\xi,x)=-\frac{(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2}D_x w\wedge D_\xi w\wedge(D_x D_\xi u_1)^\alpha\wedge(D_x D_\xi u_2)^\beta,$$

where

$$w=u_2-u_1,\quad D_x=dx^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad D_\xi=d\xi^\kappa\frac{\partial}{\partial\xi^\kappa},$$

$$D_x D_\xi=dx^i\wedge d\xi^\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial\xi^\kappa},\qquad D=D_x+D_\xi\,,$$

$$x\in M\setminus\partial M,\ \xi\in\partial M\ \ i=1,\dots\nu;\ \kappa=1,\dots,\nu-1.$$

In order to obtain the estimate (3) one has to integrate the identity (4) over $\partial M\times M$ and to make use of Stokes' formula. The uniqueness of the solution of the inverse kinematic problem follows from the estimate (3) if one notes that from the fact that $\tau_1=\tau_2$ there follows the equality $n_1=n_2$

Remark 1. From the theorem of the present paper follow the results of [1–3].

Remark 2. The estimate (3) for the case $\nu=3$, which presents interest in geophysics, has the form

$$\int_M(n_1-n_2)^2(n_1+n_2)\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\le\int_{\partial M\times\partial M}\Omega^{\tau_1,\tau_2}\ ,$$

where

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2} = \frac{1}{8\pi}\det\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial\xi^1} & \frac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial\xi^2} \\ \frac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial\eta^1} & \frac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial\eta^1\partial\xi^1} & \frac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial\eta^1\partial\xi^2} \\ \frac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial\eta^2} & \frac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial\eta^2\partial\xi^1} & \frac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial\eta^2\partial\xi^2} \end{vmatrix} d\xi^1\wedge d\xi^2\wedge d\eta^1\wedge d\eta^2.$$

The author expresses his gratitude to A. P. Kiselev for useful discussions during all the stages of the preparation of the paper.

LITERATURE CITED

1. V. G. Romanov, "On the uniqueness of the definition of an isotropic Riemannian metric inside a domain in terms of the distances between points of the boundary," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 218, No. 2, 295-297 (1974).
2. R. G. Mukhometov, "The problem of the recovery of a two-dimensional Riemann metric and integral geometry," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 232, No. 1, 32-35 (1977).
3. R. G. Mukhometov, "The inverse kinematic problem of seismology on the plane," in: Mathematical Problems of Geophysics (collection of papers of the Computational Center, Siberian Branch, Academy of Sciences of the USSR), No. 6, Part 2 (1975), pp. 243-254.
4. L. Shvarts (Schwartz), Analysis [Russian translation], Vol. 2, Mir, Moscow (1972).

FINITE-DIMENSIONAL OSCILLATORY MODELS IN THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY AND IN GAS DYNAMICS

O. I. Bogoyavlenskii and S. P. Novikov

UDC 530.12+533.6+513.83

The methods of the qualitative theory of differential equations are applied for the investigation of homogeneous cosmological models and to models of stellar explosion in the classical gas dynamics. The strong degeneracy of the singular points of a dynamical system are investigated by their successive solving with the aid of special changes of coordinates. The trajectories of the system are approximated by sequences of separatrices of nondegenerate singular points. The limit cycles are investigated.

1. Qualitative Theory of Homogeneous Cosmology Models

As it is known, in the general theory of relativity, one investigates the four-dimensional space-time manifold M^4 with the Einstein metric g_{ij} $(i,j = 0,1,2,3)$, satisfying the Einstein equations

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ij}. \tag{1.1}$$

The homogeneous cosmology models are determined by the fact that the manifold M^4 admits a group G of motions (for the sake of definiteness, acting on the right-hand side) with space-

Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova Akad. Nauk SSSR, Vol. 84, pp. 7-15, 1979.

 0090-4104/83/2103-0254$07.50

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 84

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. 11

Сборник работ под редакцией
О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1979

Г.Я.Бейлькин

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Одной из основных проблем геофизики является изучение внутреннего строения Земли, в том числе исследование распределения скоростей упругих волн внутри земного шара.

Задача определения скорости по известным временам пробега волны между пунктами на поверхности называется обратной кинематической задачей сейсмики. Ее математическим аспектам посвящена обширная литература. Доказана единственность решения в классе показателей преломления близких к постоянной для достаточно малых выпуклых областей на плоскости [I]. Получена оценка устойчивости и доказана теорема единственности в случае ограниченной области на плоскости [2], [3].

В настоящей заметке приведена оценка устойчивости и доказана единственность решения обратной кинематической задачи сейсмики для случая областей размерности больше двух ж).

Рассмотрим компактную область M размерности $\nu \geqslant 2$ с гладкой границей ∂M. Пусть в M задана метрика $\partial s^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$. В геофизике M – трехмерный шар, являющийся моделью Земли, а $g_{ij}=\delta_{ij}$. Пусть известна функция τ, определенная на $\partial M \times \partial M$ и имеющая физический смысл времени пробега волны между точками на границе.

Спрашивается, можно ли ввести новую метрику $du = n\,ds$, такую, чтобы функция τ была представима в виде

$$\tau(\xi,\eta) = \int\limits_{\mathcal{K}_{\xi,\eta}} n\,ds$$

где $\xi, \eta \in \partial M$, а $\mathcal{K}_{\xi,\eta}$ – геодезическая метрика du, соединяющая точки ξ и η. Сформулированная задача (отыскание показателя преломления n по годографу τ) называется обратной кинематической задачей.

ж) Работа была доложена на семинаре ЛОМИ по математическим вопросам теории дифракции 25 апреля 1978 года.

Она непосредственно связана с краевой задачей

$$\begin{cases}\nabla_\xi(\nabla_x u)^2=0 & x\in M\setminus\partial M,\ \xi\in\partial M\\ u|_{\partial M\times\partial M}=\tau\end{cases}\qquad (I)$$

где ∇_x, ∇_ξ – градиенты в метриках M и ∂M соответственно.

Ясно, что обратная кинематическая задача нелинейна, так как семейство геодезических заранее неизвестно.

Опишем класс показателей преломления, в котором получена оценка устойчивости. Пусть $S^{\nu-1}(x)$ сфера достаточно малого радиуса с центром в произвольной внутренней точке x области M, а $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$ – семейство геодезических метрики $n\,ds$, соединяющее x с точками ξ границы ∂M. Тогда через каждую точку на сфере $S^{\nu-1}(x)$ проходит единственная геодезическая семейства $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$. Рассмотрим отображение K_x:

$$K_x:\ S^{\nu-1}(x)\longrightarrow\partial M, \qquad (2)$$

сопоставляющее точке $\theta\in S^{\nu-1}(x)$ точку ξ границы ∂M, которая лежит на той же геодезической из семейства $\{\mathcal{K}_{\xi,x}\}$, что и точка θ.

Обозначим через N – класс показателей преломления (вещественных положительных функций в области M) таких, что для любой точки $x\in M\setminus\partial M$ отображение (2) C^1-диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

Поясним физический смысл последнего условия. Оно выполнено, если область и показатель преломления такие, что источник, помещенный в произвольную внутреннюю точку, освещает всю границу ∂M, которую можно гладко "стянуть" вдоль геодезических в малую сферу вокруг источника.

ТЕОРЕМА. Если решение обратной кинематической задачи в классе N существует, то оно единственно и справедлива оценка устойчивости

$$\int_M (n_2-n_1)(n_2^{\nu-1}-n_1^{\nu-1})\sqrt{g}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^\nu \le \int_{\partial M\times\partial M}\Omega^{\tau_1,\tau_2}, \qquad (3)$$

где показатели преломления n_1, n_2 – решения обратной кинематической задачи из класса N, построенные по функциям τ_1, τ_2 соответственно; $g=\det g_{ij}$. Здесь Ω^{τ_1,τ_2} – дифференциальная форма, которая может быть записана в виде

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2}(\xi,\eta)=-\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{2\pi^{\nu/2}(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=}$$

где $\tau=\tau_2-\tau_1$, $D_\eta=d\eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}$,

$$D_\eta D_\xi=d\eta^i\wedge d\xi^j\frac{\partial^2}{\partial\eta^i d\xi^j},\ \xi,\eta$$

Через $\wedge$ обозначена операция
них форм.

Рассмотрим функции $u_\sigma(\xi,$

$$u_\sigma(\xi,x)=\int_{\mathcal{K}^\sigma_{\xi,x}} n\,d$$

которые являются решениями зада
$u_\sigma(\xi,\eta)=\tau_\sigma(\xi,\eta)$, где $\eta\in$
но связать дифференциальные фор
$\theta\in S^{\nu-1}(x)$, такие, что

$$\int_{S^{\nu-1}(x)}\omega_0^\sigma(\theta,x)=\frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}$$

Здесь $S^{\nu-1}(x)$ – сфера достат
точке $x\in M\setminus\partial M$.

Основную роль при доказатель
ЛЕММА. Если выполнены услови
дество

$$\sqrt{g}(n_1^\nu\omega_0^1+n_2^\nu\omega_0^2-g^{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x^i}\frac{\partial u_2}{\partial x^j}(n_1^{\nu-2}\omega$$

где Ω^{u_1,u_2} – дифференциальн

$$\Omega^{u_1,u_2}(\xi,x)=-\frac{(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2}D$$

где

$$w=u_2-u_1,\quad D_x=dx^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$D_xD_\xi=dx^i\wedge d\xi^k\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial\xi^k},$$

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2}(\xi,\eta)=-\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{2\pi^{\nu/2}(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2} D_\eta\tau\wedge D_\xi\tau\wedge(D_\eta D_\xi\tau_1)^\alpha\wedge(D_\eta D_\xi\tau_2)^\beta,$$

где $\tau=\tau_2-\tau_1$, $D_\eta=d\eta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i}$, $D_\xi=d\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}$,

$$D_\eta D_\xi=d\eta^i\wedge d\xi^j\frac{\partial^2}{\partial\eta^i d\xi^j},\ \xi,\eta\in\partial M,\ \ i,j=1,\dots\nu-1.$$

Через $\wedge$ обозначена операция внешнего умножения дифференциальных форм.

Рассмотрим функции $u_\sigma(\xi,x)$ $\sigma=1,2$.

$$u_\sigma(\xi,x)=\int_{K^\sigma_{\xi,x}} n\,ds,$$

которые являются решениями задачи (I), с краевым условием $u_\sigma(\xi,\eta)=\tau_\sigma(\xi,\eta)$, где $\eta\in\partial M$. С функциями u_σ можно связать дифференциальные формы "телесный угол" [4] $\omega^\sigma_o(\theta,x)$, $\theta\in S^{\nu-1}(x)$, такие, что

$$\int_{S^{\nu-1}(x)}\omega^\sigma_o(\theta,x)=\frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\qquad \sigma=1,2.$$

Здесь $S^{\nu-1}(x)$ – сфера достаточно малого радиуса с центром в точке $x\in M\setminus\partial M$.

Основную роль при доказательстве теоремы играет

ЛЕММА. Если выполнены условия теоремы, то справедливо тождество

$$\sqrt{g}\,(n_1^\nu\omega^1_o+n_2^\nu\omega^2_o-g^{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x^i}\frac{\partial u_2}{\partial x^j}(n_1^{\nu-2}\omega^1_o+n_2^{\nu-2}\omega^2_o))\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge dx^\nu=D\Omega^{u_1,u_2},\quad(4)$$

где Ω^{u_1,u_2} – дифференциальная форма, представимая в виде

$$\Omega^{u_1,u_2}(\xi,x)=-\frac{(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}}{(\nu-1)!}\sum_{\alpha+\beta=\nu-2}D_x w\wedge D_\xi w\wedge(D_x D_\xi u_1)^\alpha\wedge(D_x D_\xi u_2)^\beta,$$

где

$$w=u_2-u_1,\ \ D_x=dx^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \ D_\xi=d\xi^k\frac{\partial}{\partial\xi^k},$$

$$D_x D_\xi=dx^i\wedge d\xi^k\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial\xi^k},\qquad D=D_x+D_\xi,$$

$$x \in M \setminus \partial M\,;\ \xi \in \partial M\quad i=1,\dots,\nu\,;\ k=1,\dots,\nu-1.$$

Для получения оценки (3) нужно проинтегрировать тождество (4) по $\partial M \times M$ и воспользоваться формулой Стокса. Единственность решения обратной кинематической задачи следует из оценки (3), если заметить, что из того, что $\tau_1 = \tau_2$ вытекает равенство $n_1 = n_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из теоремы, приведенной в настоящей работе, следуют результаты работ [I,2,3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка (3) для случая $\nu = 3$, представляющего интерес для геофизики, имеет вид

$$\int\limits_M (n_1 - n_2)^2 (n_1 + n_2)\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\nu \leqslant \int\limits_{\partial M \times \partial M} \Omega^{\tau_1,\tau_2}\,,$$

где

$$\Omega^{\tau_1,\tau_2} = \frac{1}{8\pi} \det \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial \eta^1} & \dfrac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial \eta^1 \partial \xi^1} & \dfrac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial \eta^1 \partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial(\tau_2-\tau_1)}{\partial \eta^2} & \dfrac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial \eta^2 \partial \xi^1} & \dfrac{\partial^2(\tau_1+\tau_2)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} \end{vmatrix} d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\eta^1 \wedge d\eta^2.$$

Автор приносит благодарность А.П.Киселеву за полезные обсуждения на всех этапах работы.

Литература

I. Р о м а н о в В.Г. Об однозначности определения изотропной римановой метрики внутри области через расстояния между точками границы. – Докл.АН СССР, 1974, 218, 2, с.295–297.

2. М у х о м е т о в Р.Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия. – Докл.АН СССР, 1977, 232, I, с.32–35.

3. М у х о м е т о в Р.Г. Обратная кинематическая задача сейсмики на плоскости. – В кн.: "Мат.проблемы геофизики",(сборник трудов ВЦ СО АН СССР), 1975, вып.6, ч.2, с.243–254.

4. Ш в а р ц Л. "Анализ", т.2, М., "Мир", 1972, 432 с.